UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

6. Blatt zur Übung Analysis I
(Besprechung am 13.11.2017)

Theorieaufgaben.
1. Erklären Sie die Begriffe *Häufungswert* und *Limes superior* bzw. *Limes inferior*.
2. Erklären Sie den *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

Beweisaufgaben.
Aufgabe 19. Untersuchen Sie folgende reelle Folgen auf Konvergenz:
(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \dfrac{3^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_n := \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $c_n := \dfrac{n^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $d_n := (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 20.
(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Seien $p \in \mathbb{N}$ und $x_i \ge 0$ für alle $1 \le i \le p$. Zeigen Sie: Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$d_n := \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{p} x_i^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen $\max\{x_i \colon 1 \le i \le p\}$.

Aufgabe 21. Untersuchen Sie folgende komplexe Folgen auf Konvergenz:
(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := \dfrac{3-i}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_n := \dfrac{i^n}{n^{(i^{2n})}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $c_n := \dfrac{ni+1}{2ni^n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 22. Gegeben seien die Mengen $N_g := \{n \in \mathbb{N} \colon n^8 > n! \text{ und } \exists k \in \mathbb{N} \text{ sodass } n = 2k\}$ und $N_u := \{n \in \mathbb{N} \colon n^8 > n! \text{ und } \exists k \in \mathbb{N} \text{ sodass } n = 2k-1\}$. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } n \in \mathbb{N}_g, \\ -3 & \text{falls } n \in \mathbb{N}_u, \\ (-1)^n - \frac{1}{n^3} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \setminus \{N_g \cup N_u\}, \end{cases}$$

an. Begründen Sie dabei einerseits, warum die von Ihnen angegebenen Werte tatsächlich Häufungspunkte sind, und andererseits, dass es keine weiteren als die von Ihnen angegebenen Häufungspunkte gibt.