Fachbereich Mathematik **Partielle Differentialgleichungen**
Universität Salzburg **Wintersemester 2016/17**
Prof. Dr. Verena Bögelein **Besprechung: 20.10.2016**

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

In der Vorlesung haben Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0$$

kennen gelernt. Sei nun $u(x,t)$ eine hinreichend glatte Lösung dieser Gleichung auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass für $\lambda > 0$ auch die Funktion $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ die Wärmeleitungsgleichung löst.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie die folgende Ungleichung

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

wobei $a, b \geq 0$ und $p \in [1,\infty)$ sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Konvexität der Funktion $f(x) = x^p$.

(b) Zeigen Sie mithilfe von (a):

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n a_i^p,$$

wobei $a_i \geq 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ und $p \in [1,\infty)$ sind.

Aufgabe 3.

Für eine komplexwertige Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u = -\lambda^2 u$$

auf Ω.

Zeigen Sie: u erfüllt die Helmholtz-Gleichung genau dann, wenn gilt:

(a) $f(x,t) = e^{i\lambda t}u(x)$ erfüllt auf $\Omega \times \mathbb{R}$ die Wellengleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta_x f$,

(b) $g(x,t) = e^{-\lambda^2 t}u(x)$ erfüllt auf $\Omega \times \mathbb{R}$ die Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta_x g$,

(c) $h(x,t) = e^{-i\lambda^2 t}u(x)$ erfüllt auf $\Omega \times \mathbb{R}$ die Schrödingergleichung $-i\frac{\partial h}{\partial t} = \Delta_x h$.

Aufgabe 4.

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

in $\mathbb{R}^2$ und führen über $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x,y) = (x+y, x-y) = (\zeta,\eta)$ neue Koordinaten ein.

(a) Wie sieht die Wellengleichung in den neuen Koordinaten aus ?

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Wellengleichung.

Literaturvorschläge zur Vorlesung:

- L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS Press
- F. John, *Partial Differential Equations*, Springer
- D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer
- J. Jost, *Partielle Differentialgleichungen*, Springer