UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 31.01.2017

Maß- und Integrationstheorie

14. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie die Flächenformel für orientierte Oberflächenintegrale.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 45

Sei Ω ein $\mathcal{H}^{N-1}$- fast-überall glatt berandetes unbeschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$ und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ein Vektorfeld auf Ω mit

$$\int_\Omega |\operatorname{div} F| \,\mathrm{d}\mathcal{L}^N < \infty, \quad \int_{\partial\Omega} |F \cdot \nu| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{R\to\infty} \int_{\Omega\cap S_R^{N-1}} |F| \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann der Gaußsche Satz gilt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \,\mathrm{d}\mathcal{L}^N = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Gaußschen Satz für beschränkte Gebiete auf die offenen Mengen $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ an. Benutzen Sie dabei (ohne Beweis), dass diese Mengen $\mathcal{H}^{N-1}$-fast-überall glatt sind für alle bis auf abzählbar viele Werte von R.

Aufgabe 46

Sei $D = \left\{(x, y, z) = \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\right\}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, y, z) = \frac{\frac{x^2 y}{2} + 4y^2 z - \frac{2z^3}{9}}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + 4y^2 + \frac{4z^2}{81}}}.$$

a) Bestimmen Sie ∂D und $\nu_D(x)$ für $x \in \partial D$.

b) Finden Sie ein Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $F \cdot \nu_D = g$ gilt.

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D} g \,\mathrm{d}\mathcal{H}^2$.

Aufgabe 47

Ziel dieser Aufgabe ist es die sogenannten Greenschen Formeln zu zeigen. Dazu sei $D \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen,

a) Zeigen Sie, dass für $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ und $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ die folgende Identität gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\Big) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^N = \int\limits_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot \nu_\Omega \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$

b) Sei nun $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(u\Delta v - v\Delta u\Big) \,\mathrm{d}\mathcal{L}^N = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(u\nabla v - v\nabla u\Big) \cdot \nu_\Omega \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}.$$