FORMELSAMMLUNG

Für die Studienberechtigungsprüfungen
Mathematik 1 und Mathematik 2

1.1 Termumformungen, Binomischer Satz

Binomische Formeln:

1. Bin. Formel: $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$

2. Bin. Formel: $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}$

3. Bin. Formel: $\boxed{(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2}$

- $a^2 + b^2$ reell nicht zerlegbar.
- $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \cdot b^k$

Binomischer Satz:

$$\boxed{(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}$$

- Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.
- Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \; \ldots \; \cdot n, \qquad 0! = 1! = 1.$
- Für $(a-b)^n$ ist das Vorzeichen *alternierend*: $(a-b)^3 = +a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$.

Binomischer Satz und pascalsches Zahlendreieck:

1	$n=0$	$\binom{0}{0}$	$(a+b)^0 = 1$
1 + 1	$n=1$	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1$
1 + 2 + 1	$n=2$	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1 + 3 + 3 + 1	$n=3$	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	$n=4$	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

Betrag: $\boxed{|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$ „macht x immer positiv".

1.2 Bruchrechnen

Addition, Subtraktion	$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{a \cdot y}{b \cdot y} \pm \frac{x \cdot b}{y \cdot b} = \frac{a \cdot y \pm x \cdot b}{b \cdot y}}$ $b,\ y \neq 0$	▶ Hauptnenner: kgV(b, y), ▶ Brüche auf HN erweitern, ▶ Zähler addieren.
Multiplikation	$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y}}$ $b,\ y \neq 0$	▶ „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner".
Division, Doppelbrüche	$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}}$ $b,\ x,\ y \neq 0$	▶ Division durch Bruch: Multiplikation mit dessen Kehrwert.

2.1 Potenzen

Definition: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$ heisst n-te Potenz von a, wobei $\begin{cases} a \in \mathbb{R}: & \text{Basis} \\ n \in \mathbb{N}: & \text{Exponent.} \end{cases}$

Insbesondere: $a^1 = a$ und $\begin{cases} a^0 = 1, & \text{falls } a \neq 0 \\ 0^n = 0, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$

- **Negative Exponenten $\Rightarrow$ Nenner:** $\boxed{k \cdot a^{-n} = \dfrac{k}{a^n}}$ $\quad a \neq 0.$

- **Rationale Exponenten $\Rightarrow$ Wurzeln:** $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $\quad a \geq 0, \quad n > 0.$

  speziell: $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $\quad$ Quadratwurzel: $\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$

2.2 Potenzsätze

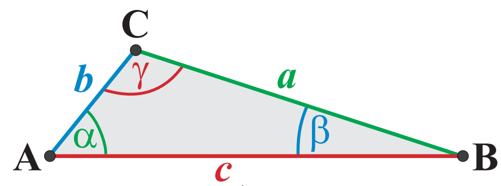
Gleiche Basis	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a \neq 0$
Gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$
	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$b \neq 0$
Doppelte Potenzen	$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$a \geq 0$

2.3 Logarithmen

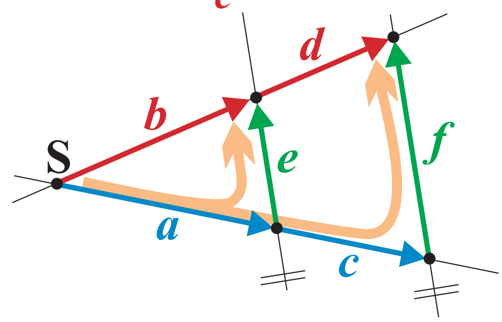
Definition	$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$	$a, x > 0, \quad a \neq 1$
Multiplikation, Division	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
Potenzen	$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x) \quad x > 0$	$a^x = b \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$
Basiswechsel	$\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad \begin{matrix} a > 0; & a \neq 1 \\ b > 0; & b \neq 1 \end{matrix}$	speziell: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

3 Planimetrie

3.1 Allgemeine Dreiecke



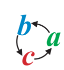
- **Winkelsumme:** $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$
- **Dreiecksungleichung:** $\boxed{c < a + b}$
- **Ähnlichkeit, Strahlensätze:** Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn sie **gleiche Winkel** und / oder **gleiche Seitenverhältnisse** haben.



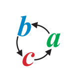
  1. Strahlensatz: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$

  2. Strahlensatz: $\boxed{\frac{a}{e} = \frac{a+c}{f}}$

- **Sinussatz:** $\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 \cdot R}$ wobei R : Umkreisradius.

- **Cosinussatz:** $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)}$ und zyklisch: 

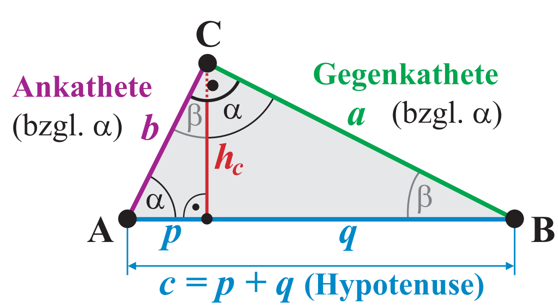
- **Fläche:** $\boxed{A_\Delta = \frac{1}{2}\,(\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}) = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}}$

  ▶ **Zwei Seiten und Zwischenwinkel:** $\boxed{A_\Delta = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin(\alpha)}$ und zyklisch: 

  ▶ **Drei Seiten (Heron):** $\boxed{A_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

  ▶ **Drei Winkel und Umkreisradius *R*:** $\boxed{A_\Delta = 2\,R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}$

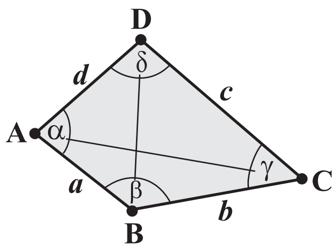
3.2 Rechtwinklige Dreiecke



- **Satz von Pythagoras:** $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
- **Höhensatz:** $\boxed{{h_c}^2 = p \cdot q}$
- **Kathetensatz (Satz von Euklid):**
  $\boxed{a^2 = c \cdot q}$ oder $\boxed{b^2 = c \cdot p}$
- **Trigonometrische Funktionen:**
  $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}}$

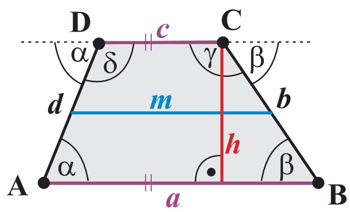
3.3 Vierecke

Allgemeines Viereck



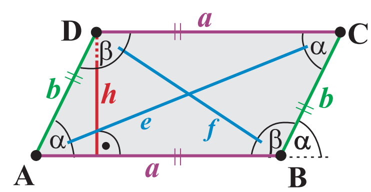
▶ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Trapez



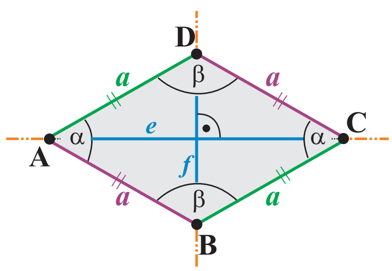
▶ $A = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h$

Parallelogramm



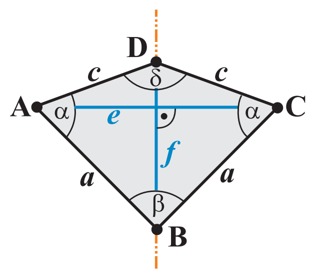
▶ $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

Rhombus (Raute)



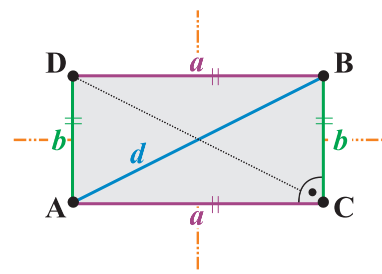
▶ $A = \frac{e \cdot f}{2} = a^2 \cdot \sin(\alpha)$

Drachenviereck



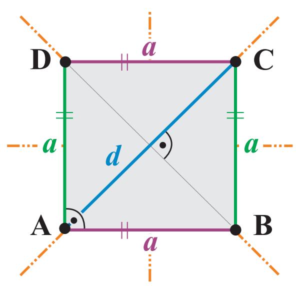
▶ $A = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot c \cdot \sin(\alpha)$

Rechteck



▶ $A = a \cdot b$

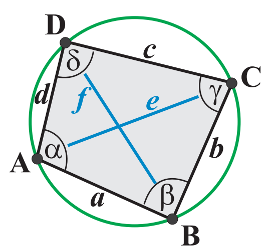
Quadrat



▶ $A = a^2$

▶ $d = a \cdot \sqrt{2}$

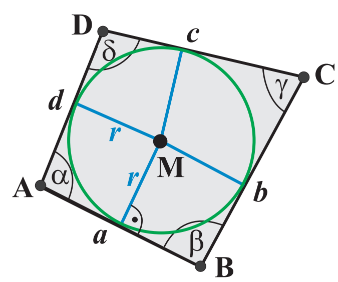
Sehnenviereck



▶ $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

▶ $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$

Tangentenviereck

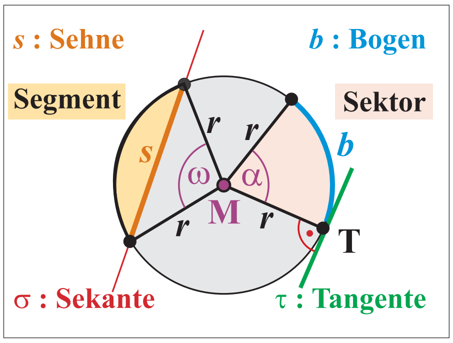


▶ $a + c = b + d$

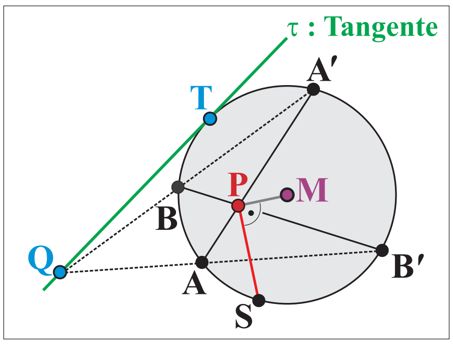
▶ $A = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$

Symmetrieachsen sind in oranger Farbe gekennzeichnet.

3.4 Kreis



Umfang	$\boxed{U = 2\pi \cdot r}$
Bogenlänge	$b = 2\pi\, r \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$
Fläche	$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$
Sektor	$A_{\text{Sek}} = \pi\, r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360°} = \dfrac{b \cdot r}{2}$
Segment	$A_{\text{Seg}} = r^2 \cdot \left(\pi \cdot \dfrac{\omega}{360°} - \dfrac{1}{2} \cdot \sin(\omega)\right)$



Sehnensatz	$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PS}^2$
Sekantensatz	$\overline{QB} \cdot \overline{QA'} = \overline{QA} \cdot \overline{QB'} = \overline{QT}^2$

▶ **Kreisgleichung** des Kreises K mit Mittelpunkt $\mathrm{M}(u \;/\; v)$ und Radius r:

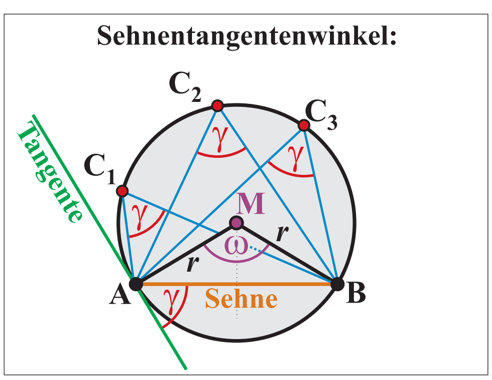
Mittelpunktsform $\xrightarrow{\text{ausmultiplizieren}}$ **Koordinatenform**

$K\colon (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ $\qquad$ $K\colon x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

quadratisch ergänzen

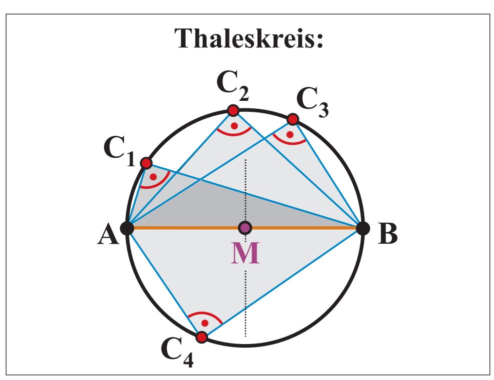
Tangente τ an K im Punkt $\mathrm{T}(x_0 \;/\; y_0)$: $\boxed{\tau:\; (x-u)\cdot(x_0-u) + (y-v)\cdot(y_0-v) = r^2}$

Kreiswinkelsätze



▶ gleiche Peripheriewinkel γ.

▶ Zentriwinkel $\omega = 2 \cdot \gamma$.

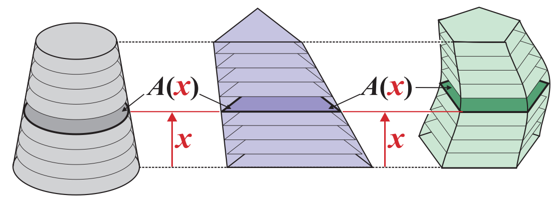


▶ gleiche Peripheriewinkel $\gamma = 90°$.

4 Stereometrie

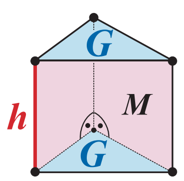
4.1 Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper sind volumengleich, wenn deren Schnittfläche $A(x)$ in jeder Höhe x den gleichen Flächeninhalt haben.

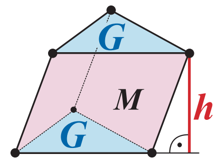


4.2 Prismen und Zylinder (Kongruente, parallele Grund- und Deckfläche)

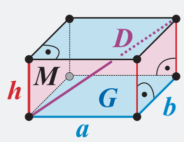
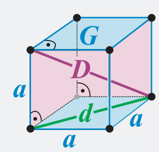
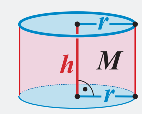
Gerades Prisma



Schiefes Prisma

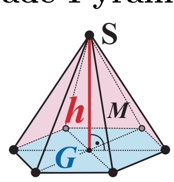


- G: Grundfläche; M: Mantelfläche.
- h: Höhe.
- Volumen: $\boxed{V = G \cdot h}$
- Oberfläche: $\boxed{A = 2 \cdot G + M}$

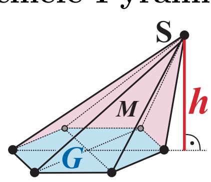
Quader	Würfel	Zylinder
		
$V = a \cdot b \cdot h$	$V = a^3$	$V = \pi\, r^2 \cdot h$
$A = 2\,(a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$	$A = 6 \cdot a^2$	$A = 2 \cdot \pi\, r^2 + 2\pi\, r \cdot h$
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$	$D = a \cdot \sqrt{3}, \quad d = a \cdot \sqrt{2}$	$M = 2\pi\, r \cdot h$

4.3 Spitze Körper

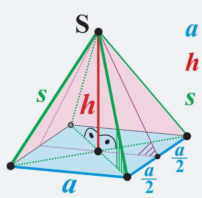
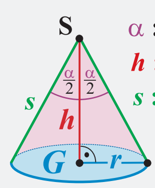
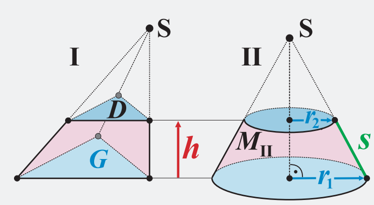
Gerade Pyramiden



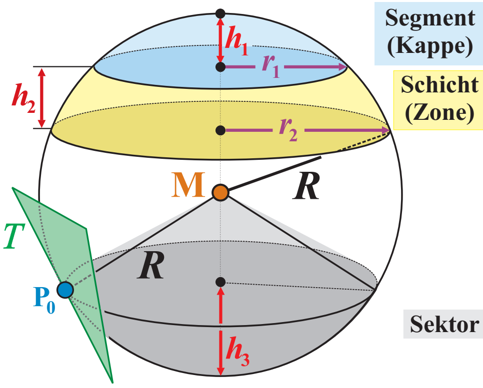
Schiefe Pyramiden



- G: Grundfläche; M: Mantelfläche.
- h: Höhe.
- Volumen: $\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$
- Oberfläche: $\boxed{A = G + M}$

Gerade, quadratische Pyramide	Gerader Kreiskegel	Pyramidenstumpf, Kegelstumpf
 **a :** Grundkante **h :** Höhe **s :** Seitenkante	 **α :** Öffnungswinkel **h :** Höhe **s :** Mantellinie	
$V = \frac{1}{3}\, a^2 \cdot h$	$V = \frac{1}{3}\, \pi r^2 \cdot h$	$V_{\mathrm{I}} = \frac{h}{3}\, (G + \sqrt{GD} + D)$
$A = a^2 + M$	$A = \pi r^2 + \pi r s, \quad M = \pi r s$	$V_{\mathrm{II}} = \frac{\pi h}{3}\, ({r_1}^2 + r_1\, r_2 + {r_2}^2)$
$s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$	$s = \sqrt{h^2 + r^2}$	$M_{\mathrm{II}} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

4.4 Kugel



Volumen: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$

- ▶ **Segment:** $V = \frac{1}{3}\pi \cdot {h_1}^2 \cdot (3R - h_1)$
- ▶ **Schicht:** $V = \frac{1}{6}\pi \cdot h_2 \cdot (3{r_1}^2 + 3{r_2}^2 + {h_2}^2)$
- ▶ **Sektor:** $V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h_3$

Oberfläche: $\boxed{A = 4\pi \cdot R^2}$

- ▶ **Segment:** $M = 2\pi R \cdot h_1$ (Kappe, Haube)
- ▶ **Schicht:** $M = 2\pi R \cdot h_2$ (Zone)
- ▶ **Sektor:** $A = 2\pi R \cdot h_3 + \pi R\sqrt{2Rh_3 - {h_3}^2}$

▶ **Kugelgleichung** einer Kugel mit Mittelpunkt M(u / v / w) und Radius R:

Mittelpunktsform — ausmultiplizieren → **Koordinatenform**

$$K: (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2 \qquad K: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

← quadratisch ergänzen

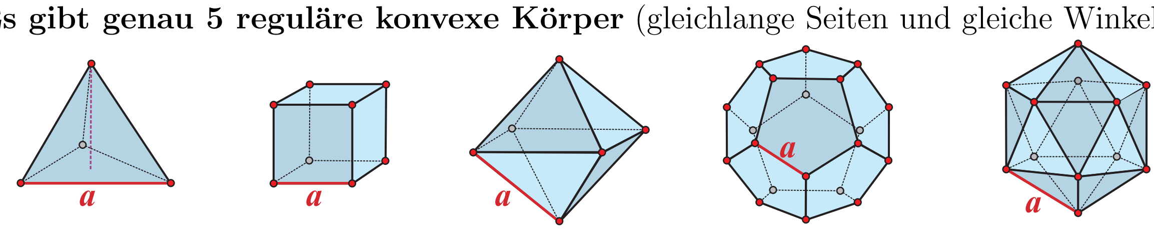
▶ **Tangentialebene T** an Kugel im Punkt $P_0(x_0 / y_0 / z_0)$:

$$\boxed{T: \ (x-u)\cdot(x_0-u) + (y-v)\cdot(y_0-v) + (z-w)\cdot(z_0-w) = R^2}$$

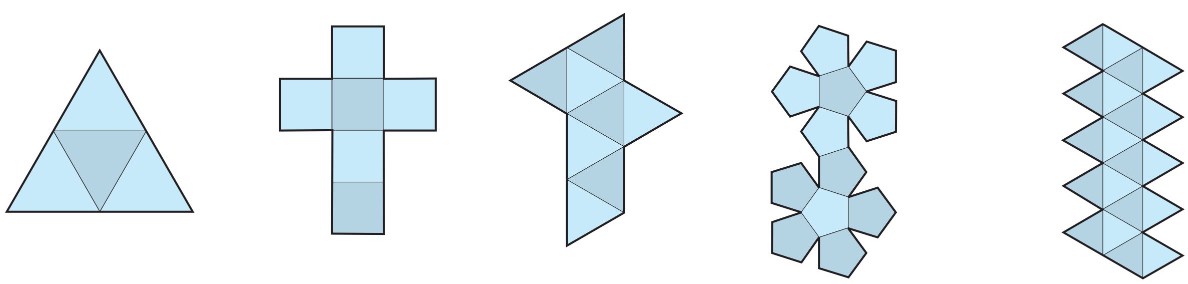
4.5 Polyeder und Platonische Körper

Polyedersatz (Euler): $\boxed{e + f = k + 2}$ wobei $\begin{cases} e: & \text{Anzahl Ecken} \\ f: & \text{Anzahl Flächen} \\ k: & \text{Anzahl Kanten.} \end{cases}$

Es gibt genau 5 reguläre konvexe Körper (gleichlange Seiten und gleiche Winkel):



***Tetra*eder (*Vier*flächner)** — ***Hexa*eder (*Sechs*flächner)** — ***Okta*eder (*Acht*flächner)** — ***Dodeka*eder (*Zwölf*flächner)** — ***Ikosa*eder (*Zwanzig*flächner)**



5.1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

▶ **Exponentialfunktionen:** $\boxed{y = f(x) = a^x}$ $\quad a > 0$

- **Eulersche Zahl:** $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\ldots$.
- Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

  $\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$ oder $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}}$

  wobei:

  t : Zeit.

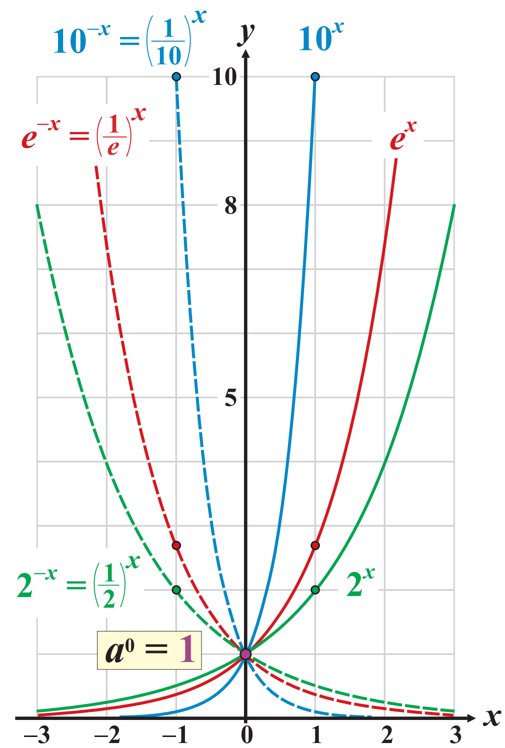
  N_0 : Startwert (Population bei $t = 0$).

  $N(t)$: Population zur Zeit t.

  $a = e^k$: Wachstumsfaktor: $\boxed{a = 1 + \frac{p}{100}}$ mit

  $$p: \left\{\begin{array}{ll} \text{Wachstum} & (p > 0) \\ \text{Zerfall} & (p < 0) \end{array}\right\} \text{ in } \%$$

  pro Zeiteinheit.



▶ **Logarithmusfunktionen:** $\boxed{\overline{f}(x) = \log_a(x)}$ $\quad x > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$.

$\overline{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$:

- Zehnerlogarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)}$

  $\log(10^x) = x, \qquad 10^{\log(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Natürlicher Logarithmus:

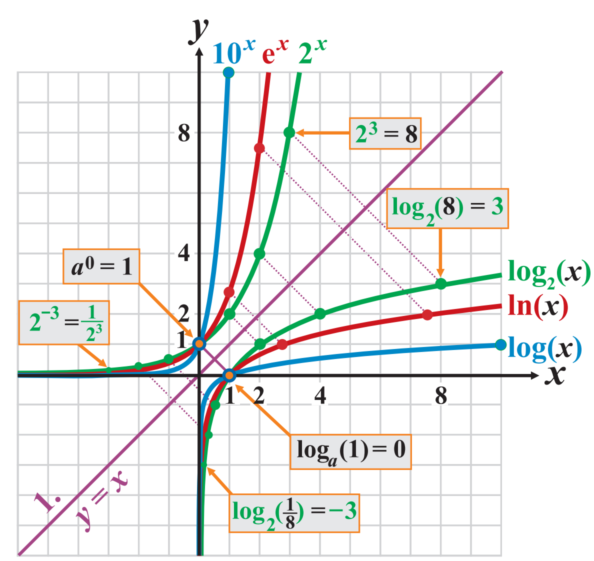
  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_e(x) = \ln(x)}$

  $\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Binärer Logarithmus:

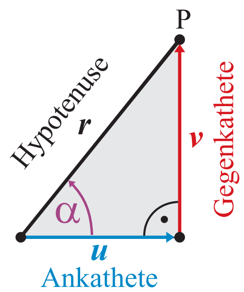
  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_2(x) = \mathrm{lb}(x)}$

  $\log_2(2^x) = x, \qquad 2^{\log_2(x)} = x \qquad (x > 0)$



5.2 Trigonomtrische Funktionen

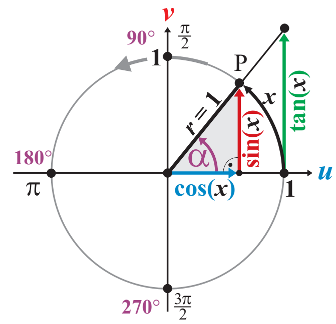
Rechtwinkliges Dreieck: $0 < \alpha < 90°$. Einheitskreis: $\alpha \in \mathbb{R}$.



$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{v}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

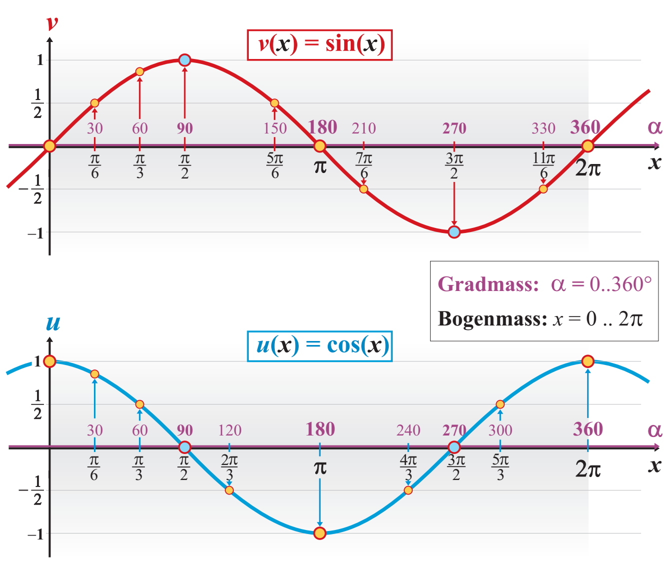
$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{u}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

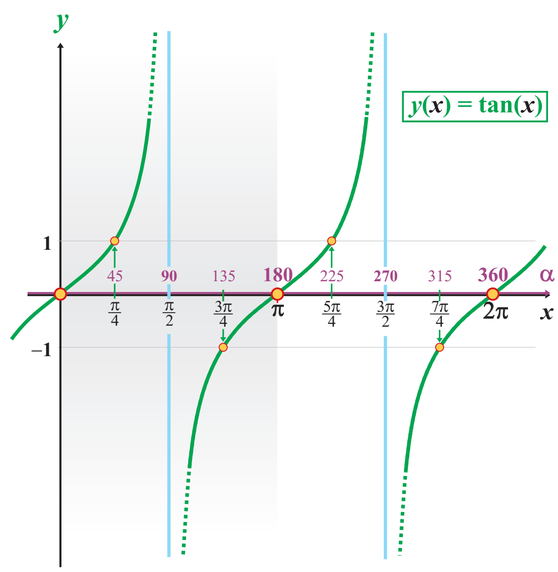
$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{v}{u} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$



Bogenmass: $\boxed{x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}}$ zu α gehörende **Bogenlänge** x am Einheitskreis.

▶ **Funktionsgraphen:**





▶ **Eigenschaften und spezielle Werte:**

	$0° \doteq 0$	$30° \doteq \frac{\pi}{6}$	$45° \doteq \frac{\pi}{4}$	$60° \doteq \frac{\pi}{3}$	$90° \doteq \frac{\pi}{2}$	Periode	Symmetrie
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$360° \doteq 2\pi$ $\sin(x+2\pi\, n) = \sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$360° \doteq 2\pi$ $\cos(x+2\pi\, n) = \cos(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$(\pm\infty)$	$180° \doteq \pi$ $\tan(x+\pi\, n) = \tan(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

▶ **Definitionsbereich:** $\mathbb{D}_{\sin} = \mathbb{D}_{\cos} = \mathbb{R}$ $\mathbb{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{(\frac{\pi}{2} + n\pi),\ n \in \mathbb{Z}\}$.

▶ **Wertebereich:** $\mathbb{W}_{\sin} = \mathbb{W}_{\cos} = [-1, 1]$ $\mathbb{W}_{\tan} = \mathbb{R}$.

▶ **Umkehrfunktionen:**
$$\begin{cases} \arcsin(x) & \text{manchmal auch } \sin^{-1}(x) \\ \arccos(x) & \text{manchmal auch } \cos^{-1}(x) \\ \arctan(x) & \text{manchmal auch } \tan^{-1}(x). \end{cases}$$

Beziehungen und Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$	$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp\sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp \frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(2\,x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(2\,x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$	$\tan(2\,x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\sin(3\,x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$	$\cos(3\,x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$	$\tan(3\,x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$	$\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

6 Gleichungen

6.1 Fundamentalsatz der Algebra

In $\mathbb{R}$ kann jedes Polynom n-ten Grades als Produkt von $k \leq n$ Linearfaktoren und nicht weiter zerlegbaren quadratischen Faktoren $q(x)$, welche nicht Null werden können, dargestellt werden:

Gleichung in Normalform:		**Zerlegung in Linearfaktoren:**
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$	**faktorisieren (falls möglich)** $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ **ausmultiplizieren**	$a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot q(x) = 0$ $\Rightarrow$ Lösungen x_1 , x_2 , …, x_k ablesbar.

In den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom n-ten Grades vollständig in Linearfaktoren.

6.2 Quadratische Gleichungen

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{R}, \qquad a \neq 0$

Diskriminante: $\boxed{D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

Lösungen: $\boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}} \quad D \geq 0$

Satz von Vieta:

Produkt der Lösungen: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Summe der Lösungen: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

6.3 Polynomgleichungen dritten und höheren Grades

$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \qquad a, b, c, d \in\ \mathbb{R},\ a \neq 0.$

Satz: Division durch $a \neq 0$ führt auf $a' = 1$, also $x^3 + b' \cdot x^2 + c' \cdot x + d' = 0$. Wenn es eine ganzzahlige Lösung x_1 gibt, dann ist diese Teiler von d'. Finde Lösung x_1 durch Einsetzen (Probieren) der Teiler von d' und dividiere die Gleichung anschliessend durch $(x - x_1)$.

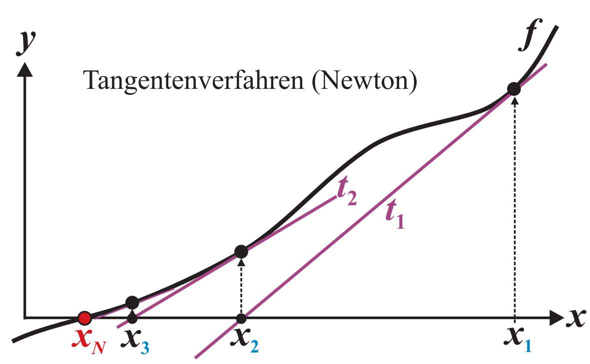
6.4 Numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung

Gesucht ist die Nullstelle N(x_N / 0) von $f(x)$. Ausgehend von einem Startwert x_1, konstruiere eine rekursiv definierte Zahlenfolge x_1, x_2, x_3,... mit Grenzwert x_N.

▶ **Sehnenverfahren (Regula Falsi)**

Wähle P(a / $f(a)$) und Q(b / $f(b)$) mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Mit Startwert $x_1 = a$ berechne:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_N}$$



▶ **Tangentenverfahren von Newton**

Wähle $P_1(x_1\ /\ f(x_1))$ mit $f'(x_1) \neq 0$. Dann:

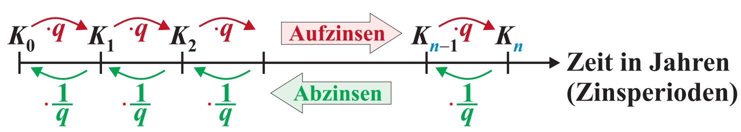
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_N}$$

(die Folge ist nicht notwendigerweise konvergent.)

7 Finanzmathematik

Aufzinsfaktor: $\boxed{q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i}$ $\quad p =$ Zins (jährlich) in %, $\quad i = \frac{p}{100}$ = Zinssatz.

▶ **Verzinsung mit Zinseszins:** Startkaptial K_0, Laufzeit n Jahre:



Endwert: $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$

Barwert: $\boxed{K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n}}$

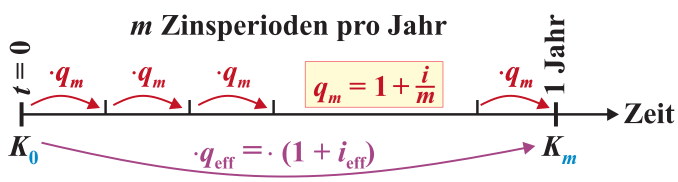
▶ **Unterjährige Verzinsung:**

Linear:	**mit Zinseszins:**	**Stetig:**
Kapital K_T nach T Tagen ohne Zinseszins:	m Zinsperioden pro Jahr, Laufzeit: n Jahre.	Kontinuierlich wird ein beliebig kleiner Zins bezahlt:
$\boxed{K_T = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{T}{360}}$	$\boxed{K_{n \cdot m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}}$	$\boxed{K_S = \lim\limits_{m \to \infty} K_{n \cdot m} = K_0 \cdot e^{i \cdot n}}$

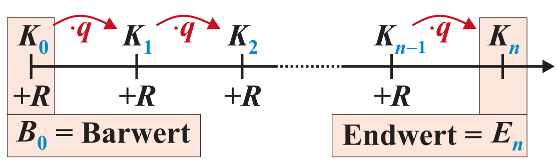
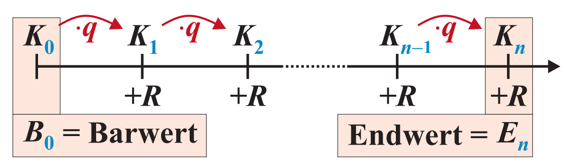
Effektiver Jahreszinssatz:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1}$$

$$\boxed{q_m = \sqrt[m]{q_{\text{eff}}}}$$



▶ **Rentenrechnung:** Zum Startkapital K_0 werden n Renten R bezahlt:

Vorschüssige Rentenzahlung		**Nachschüssige Rentenzahlung**	
			
Barwert $B_0 =$	**Endwert** $E_n =$	**Barwert** $B_0 =$	**Endwert** $E_n =$
$\boxed{K_0 + \frac{R}{q^{n-1}} \frac{q^n-1}{q-1}}$	$\boxed{K_0\, q^n + R\, q \frac{q^n-1}{q-1}}$	$\boxed{K_0 + \frac{R}{q^n} \frac{q^n-1}{q-1}}$	$\boxed{K_0\, q^n + R \frac{q^n-1}{q-1}}$

$\Rightarrow$ Bei Schuldentilgung heisst R Tilgungsrate oder Annuität.

▶ **Ableitungen in der Finanzmathematik:**

Marginale Funktion (Grenzfunktion)

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}$$

Wachstumsrate

$$\boxed{r(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln(f(t))}$$

Elastizität

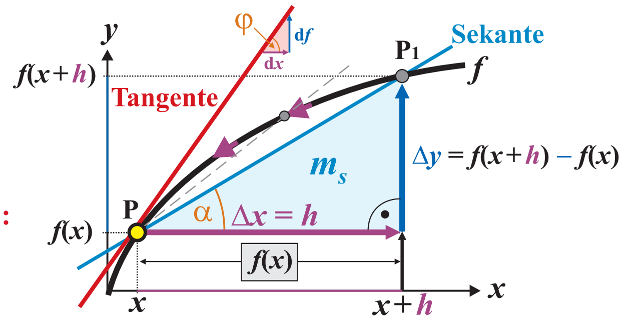
$$\boxed{\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

8 Differentialrechnung

Voraussetzung: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x)$.

- **Sekantensteigung, Differenzenquotient:**
  Mittlere Änderungsrate (Steigung)
  von f im Intervall $[x,\ x + h]$:

$$\boxed{m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \tan(\alpha)}$$



- **Tangentensteigung, Differentialquotient:**
  Lokale Änderungsrate (Steigung)
  von f im Punkt P$(x\ /\ f(x))$,
  Definition der 1. Ableitung:

$$\boxed{m_t = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \tan(\varphi)}$$

8.1 Ableitungsregeln: Seien $y = f(x)$, $y = u(x)$ und $y = v(x)$ stetige Funktionen, c eine Konstante.

▶ **Additive Konstante:** $f(x) = u(x) \pm c$

$$\boxed{f'(x) = u'(x)}$$

▶ **Multiplikative Konst.:** $f(x) = c \cdot u(x)$

$$\boxed{f'(x) = c \cdot u'(x)}$$

▶ **Summenregel:** $f(x) = u(x) \pm v(x)$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$$

▶ **Produktregel:** $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

▶ **Quotientenregel:** $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

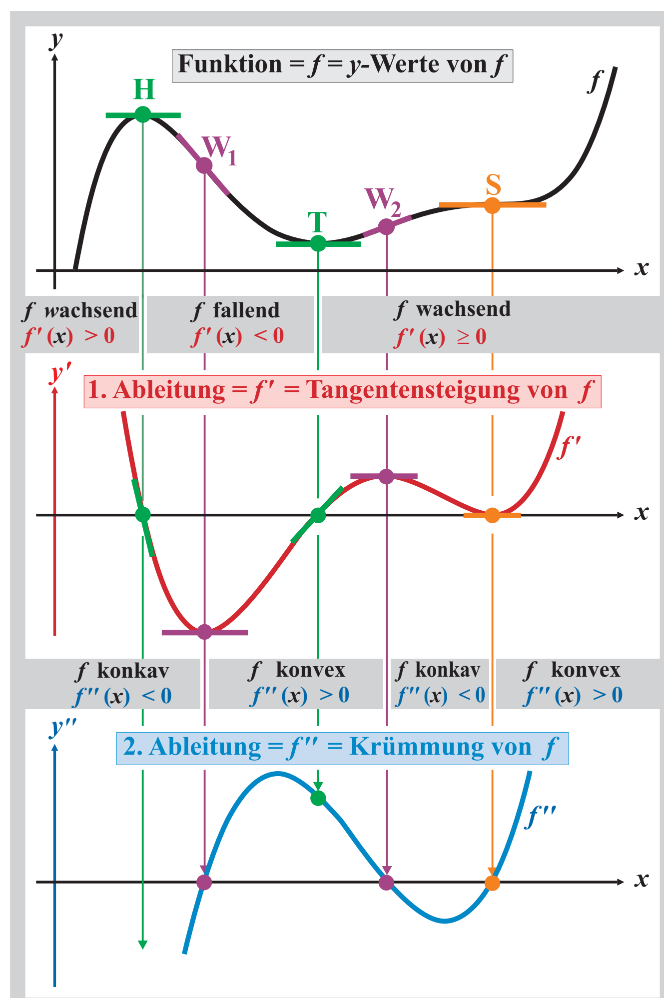
$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(\,v(x)\,)^2}}$$

▶ **Kettenregel:** $f(x) = u(v(x))$

$$\boxed{f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}$$

„Äussere mal innere Ableitung."

Bedingungen für Extrema und Wendepunkte:
Zusammenhang zwischen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$:

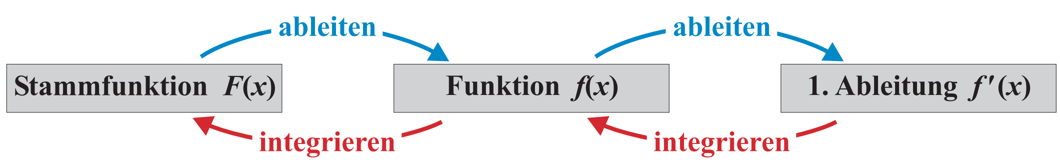


8.2 Bedingungen spezieller Punkte:

		f	f'	f''	f'''
Nullstelle	$\mathrm{N}(x_N\ /\ 0)$	$f(x_N) = 0$	-	-	-
Hochpunkt	$\mathrm{H}(x_H\ /\ f(x_H))$		$f'(x_H) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_H) \overset{\blacklozenge}{<} 0$	-
Tiefpunkt	$\mathrm{T}(x_T\ /\ f(x_T))$		$f'(x_T) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_T) \overset{\blacklozenge}{>} 0$	-
Sattelpunkt Terrassenp.	$\mathrm{S}(x_S\ /\ f(x_S))$		$f'(x_S) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f''(x_S) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f'''(x_S) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$
Wendepunkt	$\mathrm{W}(x_W\ /\ f(x_W))$		-	$f''(x_W) \overset{\bigstar}{=} 0$	$f'''(x_W) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$

$\bigstar$ = notwendige Bedingung, ($\bigstar$ + $\blacklozenge$) = hinreichende Bedingung.

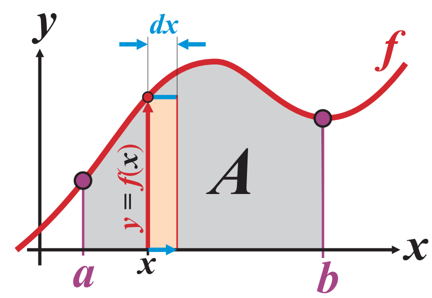
8.3 Ableitungen und Stammfunktionen:



$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $[n \neq -1]$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^x
$x \cdot (\ln\lvert x \rvert - 1)$	$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln\lvert x \rvert - 1)$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
Beachte: Variable x in Bogenmass!		
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

9 Integralrechnung

Definition: $F(x)$ heisst **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Zwei verschiedene Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich um höchstens eine additive Konstante: $F_2(x) = F_1(x) + C$. Die Konstante C heisst **Integrationskonstante**.



- **Unbestimmtes Integral = Menge aller Stammfunktionen:** $\boxed{\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}}$

- **Bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:**

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [\,F(x)\,]_a^b}$$

$|A|$: Fläche unter f zwischen den Integrationsgrenzen $x = a$ und $x = b$, wenn f zwischen a und b keine Nullstellen hat.

9.1 Integrationsregeln

▶ **Konstantenregel:** $$\boxed{\int_a^b (\,c \cdot f(x)\,)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

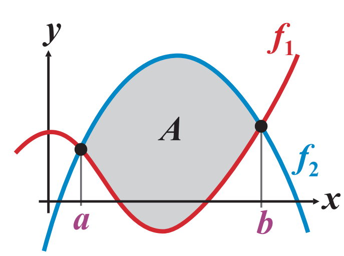
▶ **Summenregel:** $$\boxed{\int_a^b (\,u(x) \pm v(x)\,)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx \pm \int_a^b v(x)\,dx}$$

▶ **Orientierung des Integrals:** $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

▶ **Änderung der Integrationsgrenzen:** $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

▶ **„Vorzeichen" der Fläche:** $$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \text{ für } x \in [a,\ b] \\ f(x) \leq 0 \text{ für } x \in [a,\ b] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \left\{\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array}\right.}$$

▶ **Fläche zwischen f_1 und f_2:** $$\boxed{A = \int_a^b |\,f_2(x) - f_1(x)\,|\,dx}$$



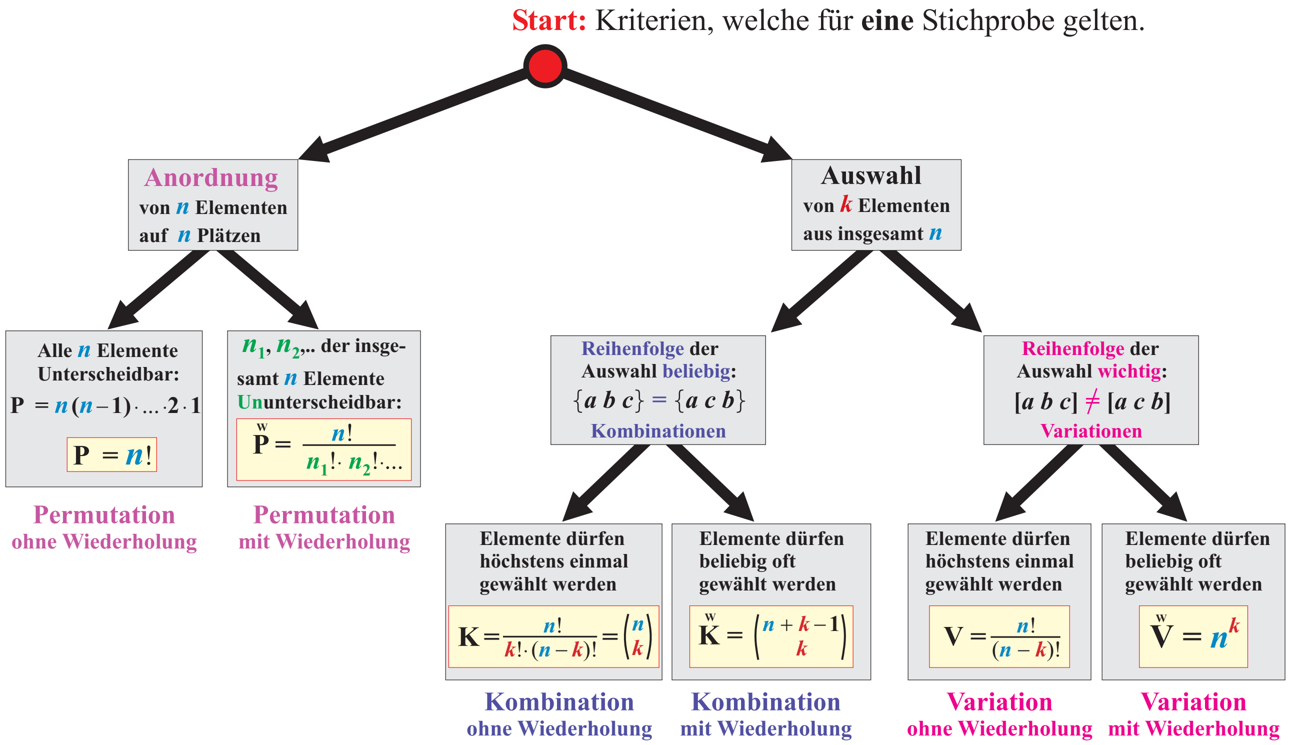
▶ **Partielle Integration:**

$$\boxed{\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = [\,u(x) \cdot v(x)\,]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx}$$

▶ **Substitutionsregel:** Es sei $f(x) = u(\,v(x)\,)$ eine verkettete Funktion. $U(\,v\,)$ bezeichne eine Stammfunktion der äusseren Funktion. Dann: $$\boxed{\int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x)\,dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(v)\,dv = [\,U(\,v\,)\,]_{v(a)}^{v(b)}}$$

10 Stochastik

10.1 Kombinatorik



Fakultät: $\boxed{n! := 1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n}$ $\quad 0! = 1,\ 1! = 1$

Binomialkoeffizient: $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$

Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Rekursion: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

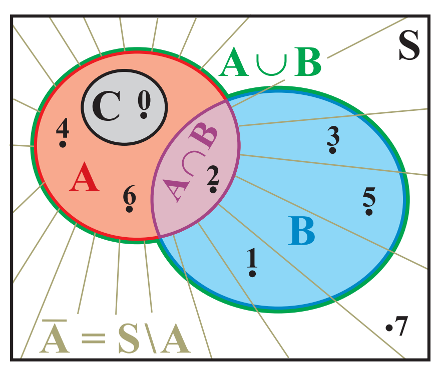
10.2 Wahrscheinlichkeit, Mengenlehre

▶ **Stichprobenraum S:** Menge aller möglichen Ereignisse (Grundmenge).

▶ **Ereignisse A, B, C:** Teilmengen von **S**.

Bsp.: $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbf{A} = \{0, 2, 4, 6\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 5\}$, $4 \in \mathbf{A}$; $3 \notin \mathbf{A}$.

$\lvert\mathbf{A}\rvert$	**Mächtigkeit**	Anzahl Elemente in **A**
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	**Schnittmenge**	**A und B**
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	**Vereinigung**	**A oder B**
$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\setminus\mathbf{A}$	**Komplement**	**S ohne A**
$\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$	**Teilmenge**	**C** enthalten in **A**
$\{\}$, $\emptyset$	**Leere Menge**	



▶ **Laplace-Wahrscheinlichkeit:** Alle Elemente in **S** treten gleichwahrscheinlich auf. Dann:

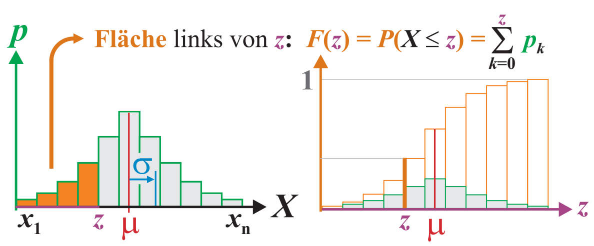
$$\boxed{P(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathbf{S}|} = \frac{\text{Anzahl Elemente in } \mathbf{A}}{\text{Anzahl Elemente in } \mathbf{S}} = \frac{\text{günstig}}{\text{möglich}}}$$

Unmögliches Ereignis $p(\emptyset) = 0$ **Sicheres Ereignis** $p(S) = 1$	$\boxed{0 \leq p(A) \leq 1}$
Gegenwahrscheinlichkeit	$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$
Addititionssatz	$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$p(B \mid A)$: Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist: „A = Wenn, B = Dann" Ereignis. $\boxed{p(B \mid A) = \frac{\mid A \cap B \mid}{\mid A \mid} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}$ (Verkleinerung des Stich-Probenraumes von S auf A)
Multiplikationssatz	$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)}$
Unabhängige Ereignisse	Die Ereignisse A und B sind **unabhängig**, falls $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$ gilt.

10.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Verteilung:

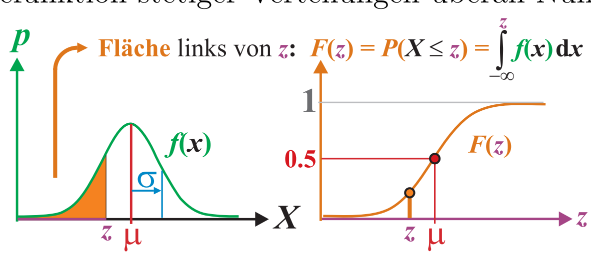
Zufallsvariable X nimmt ausschliesslich die n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten (relative Häufigkeiten, Gewichtungsfaktoren) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an.



Dichtefunktion Verteilungsfunktion

Kontinuierliche Verteilung:

Zufallsvariable X nimmt beliebige Werte $x \in \mathbb{R}$ an. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau x eintritt, heisst Dichtefunktion $f(x)$. *Anmerkung:* Streng genommen, ist die Dichtefunktion stetiger Verteilungen überall Null.



Dichtefunktion Verteilungsfunktion

$\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1}$	**Normierung**	$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1}$
$\boxed{E(X) = \mu = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k}$	**Mittelwert (Erwartungswert)**	$\boxed{E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x\, dx}$
$\boxed{\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot (x_k - \mu)^2}$	**Varianz**	$\boxed{\mathrm{var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2\, dx}$
$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$	**Standard-abweichung**	$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$

Seien X, Y zwei Zufallsvariablen und a, b Konstanten. Dann gilt:

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y) \qquad \mathrm{var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \mathrm{var}(X)$$

10.4 Binomialverteilung, Bernoulli (diskrete Verteilung)

Stichprobenraum besteht aus genau zwei Elementen: S $= \{\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}\}$ mit den gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten $p(\mathrm{A}) = p$ und $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p$. Das Ereignis A trete bei genau n Wiederholungen X mal ein. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass...

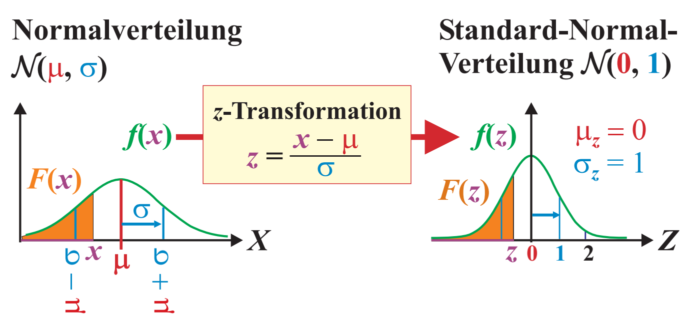
A mindestens einmal eintritt:	$\boxed{P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n}$	
A genau *k* mal eintritt:	$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$	$0 \leq k \leq n$
A höchstens *x* mal eintritt:	$\boxed{P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$	$0 \leq x \leq n$
Erwartungswert:	$\boxed{E(X) = n \cdot p}$	
Standardabweichung:	$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$	

Für $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ kann eine Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden.

10.5 Normalverteilung (kontinuierliche Verteilung)

- **Dichtefunktion:**

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \mathcal{N}(\mu, \sigma)}$$



Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \mathcal{N}(0, 1)}$$

Symmetrie:

$f(\mu + x) = f(\mu - x)$ $\qquad$ $f(-z) = f(+z)$

$F(-z) = 1 - F(+z)$

- **Verteilungsfunktion:**

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt}$$

W'keit, dass *höchstens* x eintritt.

Standard-Normalverteilung:

$$\boxed{F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}$$

- **σ-Umgebungen bei Normalverteilung:**

$1\,\sigma$-Umgebung	$2\,\sigma$-Umgebung	$3\,\sigma$-Umgebung
$p(\lvert \mu - x \rvert < 1\,\sigma) \approx 68.3\%$	$p(\lvert \mu - x \rvert < 2\,\sigma) \approx 95.4\%$	$p(\lvert \mu - x \rvert < 3\,\sigma) \approx 99.7\%$

10.6 Statistik: Daten mit einer Variablen

Seien $X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k\}$ die Werte einer Stichprobe und $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ deren **absolute Häufigkeiten**. Für den Umfang der Stichprobe gilt $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Die **relative Häufigkeit** ist durch $p(x_i) = \frac{n_i}{n}$ definiert. Insbesondere gilt $\sum\limits_{i=1}^{k} p(x_i) = 1$.

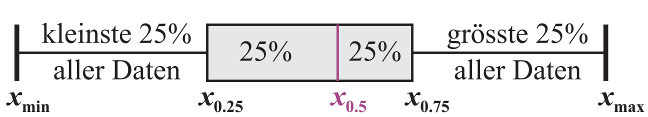
	Einzeldaten	**Gruppendaten (Klassen)**
Daten	n Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$	k Werte $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ der absolute Häufigkeit $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$
Arithmetischer Mittelwert	$\boxed{\overline{x} = E(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$	$\boxed{\overline{x} = E(X) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\, x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} p(x_i)\, x_i}$
Median	Der Median $x_{0.5}$ der Werte einer geordneten Stichprobe ist... • der in der Mitte liegende Wert, falls n ungerade. • Der Mittelwert beider mittleren Werte, falls n gerade.	
Modalwert (Modus)	Der Modalwert x_M ist der am häufigsten auftretende Messwert.	
Spannweite	$R = x_{\max} - x_{\min}$	
Varianz*	$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$	$\boxed{s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i\,(x_i - \overline{x})^2}$ oder $\boxed{s_x^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} p(x_i)\,(x_i - \overline{x})^2 = E(X^2) - (\,E(X)\,)^2}$

[*] Wenn die Werte $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ eine Population darstellen oder wenn die Varianz innerhalb der Stichprobe gesucht ist, ersetze man den Nenner $n-1$ durch n.

Standardabweichung: $\boxed{s_x = \sqrt{s_x^2}}$

Um Stichproben zu vergleichen, dient der **Variationskoeffizient** $\boxed{V = \frac{s_x}{\overline{x}} \cdot 100\%}$

Box plot: Ermittle den Median $x_{0.5}$, das obere $(x_{0.75})$ und das untere $(x_{0.25})$ Quartil, die kleinste $(x_{\min})$ und die grösste $(x_{\max})$ Stichprobe. Dann



Ungleichung von Tschebyschev:

Für eine Stichprobe mit Mittelwert $\overline{x}$ und Varianz s_x^2 gilt für die Wahrscheinlichkeit p dass ein Messwert x innerhalb einer $\pm\lambda$-Umgebung um den Mittelwert liegt: $\boxed{p(|\,x - \overline{x}\,| < \lambda) \geq 1 - \frac{s_x^2}{\lambda^2}}$

11 Mathematische Symbole

$A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	**Folgerung**: Aus A folgt B. **Äquivalenz**: A ist ¨aquivalent (gleichwertig) zu
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ $\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$	**Zahlenmengen** **Definitionsmenge**, **Wertemenge**.
$f : x \mapsto y = f(x)$	y [abhängige Var.] ist Funktion von x [unabhängige Var.]
$A = \{a, b, c\}$	Die **Menge** A der Elemente a, b, c.
$[a,\ b]$ $(a,\ b)$	Das **Intervall** zwischen (und **mit**) a und b. Das **Intervall** zwischen (aber **ohne**) a und b. Beispiel: $(2,\ 5]$ = Menge aller x, so dass $2 < x \leq 5$ gilt.
$5 \in \mathbb{N}$ $1.5 \notin \mathbb{N}$ $\mathrm{P} \in f$	**Element**: Die Zahl 5 liegt in der Menge $\mathbb{N}$; (5 ist natürliche Zahl). **Nicht Element**: Die Zahl 1.5 liegt nicht in der Menge $\mathbb{N}$. Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion f.
$A \subset B$ $g \subset E$	**Enthalten in**: Die Menge A ist enthalten in B. Die Gerade g (=Punktemenge) liegt auf der Ebene E.
$A \cap B$ $g \cap E$	A **Geschnitten mit** B: Elemente, welche in A **und** in B liegen. Gerade g **geschnitten mit** E
$A \cup B$	A **Vereinigt** mit B: Elemente, welche in A **oder** in B liegen.
$A \setminus B$	A **Ohne** B: Elemente, welche in A aber **nicht** in B liegen.
$\mid$	**Bedingung (Wenn)**. Beispiele: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ = Menge aller reellen x, welche kleiner als 1 sind. $p(B \mid A)$ = W'keit, dass B eintritt, **wenn** A bereits eingetreten ist.
$\forall$	**Für alle**: Beispiel: $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt...
$\exists$	**Es gibt**: Beispiel: $\exists\, x \in \mathbb{R}$: es gibt eine reelle Zahl x...

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	H	η	Eta	N	ν	Nü	T	τ	Tau
B	β	Beta	Θ	θ, ϑ	Theta	Ξ	ξ	Xi	Y	υ	Ypsilon
Γ	γ	Gamma	I	ι	Iota	O	o	Omicron	Φ	ϕ, φ	Phi
Δ	δ	Delta	K	κ	Kappa	Π	π	Pi	X	χ	Chi
E	ϵ, ε	Epsilon	Λ	λ	Lambda	P	ρ	Rho	Ψ	ψ	Psi
Z	ζ	Zeta	M	μ	Mü	Σ	σ, ς	Sigma	Ω	ω	Omega