Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 09

(Besprechung am 04.12.2019)

Aufgabe 17.

Wir betrachten auf $D := \{u \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])\colon u(0) = 0, u(\frac{\pi}{2}) = 1\}$ ein Funktional $\mathcal{F}\colon D \to \mathbb{R}$, welches durch

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)^2 - u(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

gegeben sei. Untersuchen Sie $\mathcal{F}$ auf Extremale.

Aufgabe 18.

Für $A, B \in \mathbb{R}$ sei auf der Menge $D := \{u \in PC^1([0,1])\colon u(0) = A, u(1) = B)\}$ ein Funktional $\mathcal{F}\colon D \to \mathbb{R}$ definiert, welches die Form

$$\mathcal{F}[u] := \int_0^1 f(u'(x)) \,\mathrm{d}x$$

mit einer Lagrange-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe.

(a) Zeigen Sie, dass das Variationsproblem $\min\{\mathcal{F}[u]\colon u \in D\}$ für den Fall, dass

$$f(\xi) = (1 + |\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

für $\alpha \in (0, 1)$ und $A \neq B$ keine Lösung hat.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis die Abschätzung $(1 + |\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > 1 + |\xi|$ für $|\xi| \neq 0$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{F}[u] > 1 + |B - A|$ für alle $u \in D$ gilt. Bestimmen Sie außerdem für $u_\varepsilon \in D$ mit $u_\varepsilon(x) := \min\{B, A + \frac{B-A}{\varepsilon} x\}$ den Grenzwert $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{F}[u_\varepsilon]$.

(b) Zeigen Sie folgende Aussage: Nimmt f sein Minimum auf $\mathbb{R}$ in mindestens zwei Punkten $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $\xi_1 < B - A < \xi_2$ an, so gibt es unendlich viele stückweise affine Lösungen mit einer Knickstelle zum Variationsproblem $\min\{\mathcal{F}[u]\colon u \in D\}$.

(c) Bestimmen Sie im Fall $f(\xi) = (1 - \xi^2)^2$ und $|B - A| < 1$ alle Lösungen des zugehörigen Variationsproblems.

(d) Bestimmen Sie nun alle Lösungen des zugehörigen Variationsproblems im Fall des Integranden f aus (c) unter der Bedingung, dass $|B - A| \geq 1$ gelte.

Hinweis: Ersetzen Sie den in (c) definierten Integranden f durch die konvexe Funktion

$$\tilde{f}(\xi) := \begin{cases} f(\xi) & \text{für } |\xi| \geq 1, \\ 0 & \text{für } |\xi| < 1, \end{cases}$$

und betrachten Sie das Variationsproblem

$$\min\left\{\tilde{\mathcal{F}}[u] := \int_0^1 \tilde{f}(u'(x)) \,\mathrm{d}x \colon u \in D\right\}.$$