UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2019/20
Dr. Stefan Sturm

Eindimensionale Variationsrechnung - Blatt 03
(Besprechung am 23.10.2019)

Aufgabe 05.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0 \in \Omega$ und $B_r(x_0) \Subset \Omega$ für geeignetes $r > 0$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Funktion $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, definiert über

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x-x_0|^2 - r^2}\right) & \text{für } x \in B_r(x_0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

um eine glatte Funktion mit kompaktem Träger auf Ω handelt, dass also $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 06.
Zeigen Sie, dass folgendes Variationsproblem

$$\min_{u \in Z} \left\{ \mathcal{F}[u] := \int_{-1}^{1} (xu'(x))^2 \,\mathrm{d}x \right\}$$

auf der Menge

$$Z := \{u \in C^1([-1,1])\colon u(-1) = a, u(1) = b\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ keine Lösung besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie zu $\varepsilon > 0$ die Funktion $u_\varepsilon\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$u_\varepsilon(x) := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

und zeigen Sie, dass $u_\varepsilon \in Z$ mit $\mathcal{F}[u_\varepsilon] \to 0$ bei $\varepsilon \downarrow 0$ gilt.