UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

7. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 20.11.2017)

THEORIEAUFGABEN.

1. Erklären Sie den Begriff der *asymptotischen Äquivalenz* von Folgen sowie den Begriff einer *Cauchyfolge* komplexer Zahlen.
2. Erklären Sie den Begriff der *Reihe* und erläutern Sie das *Majoranten-* sowie das *Minorantenkriterium* für Reihen.
3. Erläutern Sie das *Verdichtungskriterium von Cauchy*, das *Leibniz-Kriterium* sowie das *Konvergenzkriterium von Abel* für Reihen.

BEWEISAUFGABEN.

Aufgabe 23. Wir setzen im Folgenden $e := e(1)$, wobei für $x \in \mathbb{R}$

$$e(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

die aus der Vorlesung bekannte *Exponentialfunktion* bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass $e(x) \cdot e(-x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, indem Sie ausschließlich die obige Definition der Funktion e sowie die Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. (Insbesondere dürfen Sie nicht die aus der Schule bekannte Rechenregel $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ für die Exponentialfunktion verwenden.)

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Abschätzungen für $n!$:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(c) Folgern Sie schließlich aus (b) die Aussage

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \text{ für } n \to \infty.$$

Bemerkung: Man kann weiterhin zeigen, dass

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} \text{ bei } n \to \infty$$

gilt. Dieses Ergebnis wird als *Stirlingsche Formel* bezeichnet.

Aufgabe 24. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}}{n}$.

Aufgabe 25.

(a) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller, positiver Zahlen. Beweisen Sie folgende Äquivalenz von Aussagen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \text{ konvergiert} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

(b) Untersuchen Sie nun unter Benutzung des Ergebnisses aus (a), für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ die folgende Reihe konvergiert bzw. divergiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^{\alpha}}.$$

Rechtfertigen Sie außerdem, warum Sie das Ergbnis aus (a) auf diese Reihe anwenden dürfen.
Anmerkung: Hier wird mit $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log(x)$ die sogenannte *Logarithmusfunktion zur Basis e* bezeichnet, welche die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \exp(x) = e^x$ darstellt. Da diese Funktion noch nicht in der Vorlesung eingeführt wurde, dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass $\log(x) < \log(y)$ für alle $x < y$ mit $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\log(x^r) = r \cdot \log(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 26. Untersuchen Sie mit dem Majoranten- bzw. Minorantenkriterium die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 8}{n^4 + \sqrt{n} + 1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^3 - 5n^2 + 8n - 4}}$.