UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 21.11.2016

Analysis II

6. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Definieren Sie die Begriffe der Norm und der Metrik.
2. Erklären Sie die Begriffe des Inneren, Äußeren, Randes und Abschlusses einer Menge.
3. Erklären Sie den Begriff der Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 21

Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für x, $y \in \mathbb{R}^n$ ist die sogenannte französische Eisenbahnmetrik $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & \text{für } (x,y) \in G, \\ \|x\| + \|y\| & \text{für } (x,y) \notin G, \end{cases}$$

wobei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \colon x \text{ und } y \text{ liegen auf einer Geraden durch den Ursprung}\}$. Zeigen Sie, dass durch d tatsächlich eine Metrik definiert wird.

Aufgabe 22

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass $|d(x,y) - d(x',y')| \le d(x,x') + d(y,y')$ für $x, x', y, y' \in X$.

(b) Sei $\emptyset \neq M \subset X$ und $X \setminus \overline{M} \neq \emptyset$. Sei zudem $d(x,M) := \inf\{d(x,y) \colon y \in M\}$ für alle $x \in X$ definiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d(\cdot, M)\colon X \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

Aufgabe 23

In dieser Aufgabe sei $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$.

(a) Zeigen Sie die Young'sche Ungleichung

$$st \leq \tfrac{1}{p}s^p + \tfrac{1}{q}t^q$$

für $s,\, t \geq 0$, indem Sie die Konvexität des Logarithmus benützen.

Für $-\infty < a < b < \infty$ und eine Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die p-Norm von f auf $[a, b]$ durch

$$\|f\|_p := \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

definiert.

(b) Zeigen Sie die Hölder'sche Ungleichung

$$\int_a^b |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

indem Sie in Aufgabe (a) die Parameter s und t geschickt wählen und anschließend integrieren.

(c) Zeigen Sie, dass auf dem Raum $V := \{f\colon [a, b] \to \mathbb{R}\colon f \text{ integrierbar und stetig}\}$ der Riemann-integrierbaren und gleichzeitig stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ die p-Norm tatsächlich eine Norm ist. Überlegen Sie sich für den Beweis der Dreiecksungleichung zunächst, dass $|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$ gilt, integrieren Sie diese Beziehung, und wenden im Anschluss die Hölder-Ungleichung auf beide Summanden an.

(d) Wenn man in (c) die Annahme der Stetigkeit an f streicht, lassen sich nicht mehr alle Norm-Eigenschaften nachweisen. An welcher Stelle gibt es Probleme? Warum?

Bemerkung: Die Aussage (c) lässt sich (mit einfachem Beweis) auch für $p \in \{1, \infty\}$ zeigen.

Aufgabe 24

(a) Sei X eine unendliche Menge (eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist). Prüfen Sie, ob die folgenden Mengensysteme $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}'$ Topologien auf X sind:

$$\mathcal{M} := \{X \setminus M\colon M \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{M}' := \{X \setminus M\colon M \text{ unendlich}\} \cup \{X\}.$$

(b) Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum, X eine Menge, und $f\colon X \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass das Mengensystem $\mathcal{T}_X^f := \{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{T}_Y\}$ eine Topologie auf X definiert. (Man nennt T_X^f die Urbildtopologie.)

Bemerkung: Analog zu (b) lässt sich zeigen, dass für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ und $A \subset X$ das Mengensystem $\mathcal{T}_A := \{T \cap A\colon T \in \mathcal{T}_X\}$ eine Topologie auf A definiert. (Man nennt $\mathcal{T}_A$ die Relativ- oder Spurtopologie auf A und $(A, \mathcal{T}_A)$ heißt topologischer Unterraum von $(X, \mathcal{T}_X)$.

Zusatzaufgabe

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass nicht jede Topologie von einer Metrik induziert wird. Sei dazu X eine mindestens 2-elementige Menge. Zeigen Sie, dass die sogenannte Klumpen- bzw. indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ nicht metrisierbar ist.