UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 26.06.2017

Analysis III

12. Übungsblatt

Aufgabe 44

Skizzieren Sie für fixierte Radien $R \geq r > 0$ die Oberfläche

$$T_{R,r} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

des Torus und berechnen Sie den Flächeninhalt $S(T_{R,r})$ mithilfe der Flächenformel. Dabei können die Toruskoordinaten $T(\varphi,\theta) = \big([R + r\sin(\theta)]\cos(\varphi),\, [R + r\sin(\theta)]\sin(\varphi),\, r\cos(\theta)\big)$ hilfreich sein.

Aufgabe 45

Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq R\}$ die n-dimensionale Kugel mit Radius R, und sei $f \colon B \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares radialsymmetrisches Vektorfeld (d. h. $f(x) = g(\|x\|)x$ für alle $x \in B$). Verifizieren Sie für diesen Fall den Gauß'schen Integralsatz, indem Sie beide Seiten explizit berechnen.

Aufgabe 46

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet mit äußerem Einheitsnormalenvektor ν_Ω, und seien $u, v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie die sog. Green'schen Formeln:

(a) Für $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega \big(u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\big)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \nu_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) Für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega \big(u\Delta v - v\Delta u\big)\, d\mathcal{L}^n = \int_{\partial\Omega} \big(u\nabla v - v\nabla u\big) \cdot \nu_\Omega \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$