UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Assoz.-Prof. Dr. Simon Blatt
20.04.2020

Analysis II

6. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Definieren Sie den Begriff einer Metrik / einer Topologie und eines metrischen bzw. topologischen Raumes.
2. Definieren Sie die Begriffe Randpunkt, Berührpunkt und Häufungspunkt, Abschluss und Inneres einer Menge.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 1 (Offene und abgeschlossene Mengen)

Betrachten Sie auf einer beliebigen Menge X die diskrete Metrik

$$d : X \times X \to [0, \infty), \quad d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass alle Teilmengen $A \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 2 (Metrik)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann sowohl

$$d_1 : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) := \arctan(d(x, y))$$

als auch

$$d_2 : X \times X \to \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Metriken auf X definieren. (Hinweis: Zeigen Sie für $x, y \geq 0$, dass $\arctan(x+y) \leq \arctan(x) + \arctan(y)$, indem Sie für ein festes $y \geq 0$ die Monotonie von $x \to \arctan(x+y) - (\arctan(x) + \arctan(y))$ auf $[0, \infty)$ untersuchen.)

Aufgabe 3 (Topologie)

Untersuchen Sie, ob in den folgenden Fällen (X, τ) ein topologischer Raum ist:

1. $X = \mathbb{N}$, $\tau := \{U \subset X : U \text{ ist endlich}\}$
2. $X = \mathbb{N}$, $\tau := \{U \subset X : X \setminus U \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$.

Aufgabe 4 (Topologie)

1. Es sei (Y, τ_Y) ein topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass dann
$$\tau_X := \{f^{-1}(U) : U \in \tau_Y\}$$
eine Topologie auf X definiert.
2. Geben Sie ein Beispiel für einen topologischen Raum (X, τ_X) und eine Abbildung $f : X \to Y$ an, so dass
$$\tau_Y := \{f(U) : U \in \tau_X\}$$
keine Topologie auf Y definiert.

Aufgabe 5 (Metrik vs. Topologie)

Es sei X versehen mit der groben oder indiskreten Topologie $\tau = \{\emptyset, X\}$. Bestimmen Sie alle Mengen X, für die es eine Metrik d auf X gibt, die die grobe Topologie τ induziert.