Die χ^2 Verteilung

Die Familie der χ^2 Verteilungen ist ein Beispiel für eine theoretische Verteilung. In der Natur kommt diese Verteilung als Verteilungsfunktion von natürlichen, biologischen oder physikalischen Größen nicht vor. Durch mathematische Untersuchungen verschiedener Statistiken wurde die χ^2-Verteilung entdeckt

Alle χ^2-Verteilungen haben die gleiche grundlegende Form:

Zu beachten ist, daß in dieser Verteilung alle möglichen Werte der Statistik rechts von Null auftreten!

Von Bedeutung ist die χ^2-Verteilung für das Studium von „Abweichungen“, daraus ergeben sich im wesentlichen 2 große Gruppen von Anwendungen:

- **Varianztests.** Testen von Hypothesen über die Varianz oder Standardabweichung von Populationen
- Testen von Abweichungen **beobachteter Werte von erwarteten Werten**

Es zeigt sich, daß die Größe

$$\sum_i \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

χ^2-verteilt ist, wobei B_i die beobachteten Werte und E_i die erwarteten Werte sind.
Eine bestimmte χ^2-Verteilung wird durch *einen einzigen Parameter* definiert, nämlich einen positiven ganzzahligen Wert n, der als Freiheitsgrad bezeichnet wird.

Def: Eine Größe x ist χ^2-verteilt, wenn sie folgende Dichtefunktion hat:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{für alle } x > 0, \text{ und } n > 0 \text{ und ganzzahlig}$$

,

mit n Freiheitsgraden. $\Gamma(n/2)$ ist die „Gammaverteilung“ von (n/2)

Der χ^2 Test

Eine typische Anwendung des χ^2-Testes ist das Testen von Häufigkeiten, z.B. die Feststellung prüfen ob der beobachtete Anteil von Personen mit blauen Augen, grünen Augen, braunen Augen etc. mit den erwarteten Anteilen übereinstimmt. Ähnlich kann auch z.B. das Wahlverhalten einer Population untersucht werden, z.B. könnte folgende Frage statistisch geprüft werden: „Ist das Wahlverhalten der Bevölkerung von Grammatneusiedl gleich dem durchschnittlichen Wahlverhalten der Österreicher ?“

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein, um den Test anwenden zu können:

1) Die untersuchte Population kann in nicht zusammenhängende Gruppen unterteilt werden: G_1, G_2, G_3,.....
   Getestet werden die Werte p_0, p_1, p_2,...als Schätzer für Anteile bzw. die Häufigkeiten der jeweiligen Gruppe an der Gesamtpolulation

2) Die Größe der Polulation muß so gewählt werden, daß:
   $N \cdot p_0 \geq 5$
   $N \cdot p_1 \geq 5$
   $N \cdot p_2 \geq 5$
   .
   etc

Die erste Bedingung legt fest, daß die einzelnen Gruppen oder Kategorien aus der untersuchten Poulation stammen müssen und kein Element der Population mehr als einer Kategorie zugeordnet werden kann. Aus der zweiten Bedingung ergibt sich, daß die Test-Statistik (annähernd) χ^2-verteilt ist.

Soll z.B. getestet werden, ob ein Würfel in einem Würfelspiel tatsächlich faire, d.h. gleichverteilte Ergebnisse liefert, dann setzt sich die Population (der mögliche Wertebereich, Ereignisraum in mathematischer Terminologie) aus allen möglichen Wurfresultaten zusammen: x = 1,2,3,4,5,6

Für die Überprüfung, ob der Würfel „gezinkt“ ist (z.B. ungleiche Dichteverteilung !), wird die Hypothese H_0 getestet:

$$H_0: \quad p_1=1/6;\ p_2=1/6;\ p_3=1/6,\ p_4=1/6,\ p_5=1/6,\ p_6=1/6$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis x = i ist

Um Bedingung 2 zu erfüllen, muß der Würfel mindesten 30mal geworfen werden, nachdem

$$N := 30, \quad N \cdot \frac{1}{6} = 5$$

Natürlich wird das Ergebnis sicherer, wenn N größer ist.

In ähnlicher Weise kann nun auch überprüft werden, ob im Ort Grammatneusiedl das Wählerverhalten dem österreichischen Wählerverhalten entspricht, oder ob es *statistisch* *signifikante* Unterschiede gibt. Die Population ist in diesem Fall die Anzahl der Wahlberechtigten in Grammatneusiedl mit den (Farb)Kategorien: ÖVP, SPÖ, FPÖ, Grüne und Nichtwähler + ungültige Stimmen. Getestet wird nun die Hypothese (die p_I´s können z.B. die erzielten Anteile der letzten Wahl sein!!)

$$H_0: \quad \begin{array}{l} p_{övp} = 28\ \% \\ p_{spö} = 32\ \% \\ p_{fpö} = 25\ \% \\ p_{grün} = 12\ \% \\ p_{nw} = 3\% \end{array}$$

Der kleinste Stichprobenumfang wäre demnach N = 167, weil

p i	%	N x p_i
$p_{övp}$	28	46,7
$p_{spö}$	32	53,3
$p_{fpö}$	25	41,7
$p_{grün}$	12	20,0
p_{nw}	3	5,0
		166,7

Daß die einzelnen Kategorien nicht zusammenhängend sind und die ganze Bevölkerung umfassen, geht aus der Summe der p_i hervor. Summe (p_i) = 1

Die Test-Statistik

Bei festgelegter Nullhypothese werden nun, bei einer vorgegebenen Stichprobengröße die Erwartungswerte, in diesem Fall die Anzahl der *erwarteten Wähler* der jeweiligen Gruppe G_i berechnet. Ist z.B. die Stichprobengöße N = 1000, dann würden für jede Gruppe exakt N x p_i Wähler erwartet werden. Die χ^2 Test-Statistik muß nun messen, wie weit die beobachteten Ergebnissen von den erwarteten Ergebnissen abweichen. Es ist daher die folgende Größe, die Teststatistik χ^2 zu berechnen:

$$\sum_i \frac{(e_i - b_i)^2}{e_i},$$

Stichprobengröße N N=1000		Erwartete Werte N x p_i	Beobachtete Werte	$(e_i-b_i)^2/e_i$
pövp	0,28	280	265	0,83
pspö	0,32	320	322	0,01
pfpö	0,25	250	220	3,60
pgrün	0,12	120	180	30,00
pnw	0,03	30	13	9,63
		χ^2 Teststatistik:		**44,05**

Diese Teststatistik ist χ^2 verteilt mit dem Freiheitsgrad k-1, wobei k die Anzahl der Kategorien der Hypothese H_0 ist.

Der Test:
Aus der Teststatistik $\chi^2 = 44{,}05$ und der Anzahl von Freiheitsgraden $\nu = k-1$, $\nu = 4$ kann die kritische Größe $t_{k,\nu,\alpha}$ aus den Tabellen für die χ^2-Verteilung entnommen werden. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn $\chi^2 > t_{k,\nu,\alpha}$ ist.

Aus der Natur dieser Aufgabe ergibt sich, daß ein zweiseitiger Test nicht sinnvoll ist, weil die Teststatistik χ^2 umso kleiner wird, je näher die beobachteten Werte bei den tatsächlichen Werten zu liegen kommen. Sind keine Abweichungen vorhanden, dann tritt genau das ein, was erwartet wird und dann wäre die Teststatistik $\chi^2 = 0$!
In *diesem* Fall macht es daher nur Sinn, die Hypothese H_0 zu verwerfen, wenn die Teststatistik zu groß wird !!

Aus der Tabelle ist zu entnehmen

ν	α rechts-seitig				
	10%	5%	2,5%	1%	½%
4	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860

Die Hypothese H_0 ist auf allen Signifikanzniveaus zu verwerfen! Das Wählerverhalten von Grammatsneusiedl unterscheidet sich signifikant vom durchschnittlichen österreichischen Wählerverhalten.

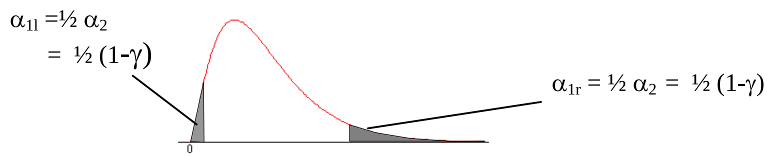
Beispiele

1.
Eine Musikladenkette möchte wissen, ob sich das Käuferverhalten im neu eröffneten Geschäft in Wien vom durchschnittlichen Kaufverhalten in den USA unterscheidet. Als Vergleich dienen die aus den Verkaufszahlen eines Jahres ermittelten Durchschnittswerte aus den USA und die Verkaufszahlen aus der neu eröffneten Filiale in Wien.

Musikstil	Durchschnittlicher %-Anteil verkaufter CD´s in den USA,	Verkaufte CD´s im neu eröffneten Geschäft in Wien
Rock	34%	1705
Jazz	18%	1001
Folk	9%	336
Classical	13%	597
Blues	2%	183
Rap	12%	602
Country	11%	619
Other	1%	54

2.
Die Ergebnisse von Radioaktivitätsmessungen haben nachstehend angeführte Zählungen über jeweils 5 min ergeben. Es ist zu überprüfen, ob die Meßergebnisse alle zur gleichen Verteilung gehören oder ob es Unterschiede zwischen ihnen gibt? (Dieses Beispiel benötigt noch ein paar Zusatzinformationen über die Poisson-Verteilung und systematische und zufällige Fehler)

<u>Tabelle</u>: Kritische Werte der χ^2 - Verteilung für ausgewählte Werte von α (Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art) bzw. $\gamma = (1- \alpha)$ %.



q	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,5	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
α_{1l}	½ %	1 %	2 ½%	5 %	10 %						
α_{1r}							10 %	5 %	2 ½ %	1 %	½ %
α_2	1 %	2 %	5 %	10 %	20 %		20 %	10 %	5 %	2 %	1 %
γ	99 %	98 %	95 %	90 %	80%		80 %	90 %	95 %	98 %	99 %
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,00393	0,0158	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	30,336	41,422	44,985	48,232	52,191	55,002
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	31,336	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	32,336	43,745	47,400	50,725	54,775	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	33,336	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	34,336	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
36	17,887	19,233	21,336	23,269	25,643	35,336	47,212	50,998	54,437	58,619	61,581
37	18,586	19,960	22,106	24,075	26,492	36,336	48,363	52,192	55,668	59,893	62,883
38	19,289	20,691	22,878	24,884	27,343	37,335	49,513	53,384	56,895	61,162	64,181
39	19,996	21,426	23,654	25,695	28,196	38,335	50,660	54,572	58,120	62,428	65,475
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	39,335	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
45	24,311	25,901	28,366	30,612	33,350	44,335	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	49,335	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	59,335	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	69,334	85,527	90,531	95,023	100,43	104,21
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	79,334	96,578	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	89,334	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	99,334	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17
120	83,852	86,923	91,573	95,705	100,62	119,33	140,23	146,57	152,21	158,95	163,65
150	109,14	112,67	117,98	122,69	128,28	149,33	172,58	179,58	185,80	193,21	198,36
200	152,24	156,43	162,73	168,28	174,84	199,33	226,02	233,99	241,06	249,45	255,26

Test auf Normalverteilung / Vergleich einer empirischen Verteilung mit einer Nvtlg.

(Nach Sachs S 422 ff.). Bei der Erhebung von Daten aus einer Grundgesamtheit steht die Frage nach der zugrunde liegenden Verteilung im Zentrum des Interesses. Zur Überprüfung auf Normalverteilung kann nun ebenfalls ein einfacher χ^2-Test herangezogen werden. Eine Modifikation dieses Tests ist von Kolmogoroff-Smirnoff entwickelt worden und unter der Bezeichnung Kolmogoroff-Smirnoff-Test für die Güte der Anpassung bekannt.
Der χ^2-Test verwendet die Abweichung der beobachteten (B) von den erwarteten Werten (E) als Teststatistik, wobei die Nullhypothese H_0 Normalverteilung annimmt. Für die praktische Anwendung ist die Ermittlung der Anzahl der Freiheitsgrade FG wichtig: Werden $\bar{x}$ und s aus klassierten Daten berechnet, so werden dafür 3 FG „verbraucht", für die Berechnung von $\bar{x}$ und s aus den Originaldaten werden nur 2 FG benötigt. Ist μ oder σ bekannt und wird der unbekannte Parameter aus den Originaldaten geschätzt, so wird nur 1 FG verbraucht. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird damit wie folgt berechnet:

Freiheitsgrade: $\nu = k - 1 - \alpha$,

mit k der Anzahl der Klassen und α = 1,2, oder 3, je nachdem wie viele unbekannte Parameter aus den Daten berechnet werden oder ob klassierte Daten vorliegen. Klassen mit $E < 1$ sind mit den benachbarten Klassen zusammenzufassen.

Im angeführten Zahlenbeispiel enthält Spalte 1 der Tabelle die Klassenmitten x, die Klassenbreite b = 1. Die beobachteten Häufigkeiten sind in Spalte 2 notiert. Die Spalten 3, 4 und 5 dienen zur Berechnung von $\bar{x}$ und s. In den Spalten 6, 7 und 8 wird der Weg von der Standardnormalvariable z zur Ordinate f(z) gezeigt. Die Multiplikation mit der Konstanten K in Spalte 9 dient zur Anpassung der Gesamtzahl der Erwartungshäufigkeiten, wobei Klassen mit E<1 mit Nachbarklassen zusammenzufassen sind. Im dargestellten Beispiel mit insgesamt 5 Klassen nach der Zusammenfassung ergibt sich daher ein FG von $\nu = 5–1–3 = 1$, nachdem in diesem Beispiel $\bar{x}$ und s aus klassierten Daten berechnet werden. Mit $\chi^2 = 2{,}381 < 2{,}706 = \chi^2_{1;0,10}$ wird die Nullhypothese (Normalverteilung) akzeptiert.

x	B	x²	Bx	Bx²	$x-\bar{x}$	$\frac{x-\bar{x}}{s}=z$	f(z)	f(z).K	E	B-E	(B-E)²	$\frac{(B-E)^2}{E}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	1	1	1	1	-2,6	-2,31	0,03	0,99				
2	4	4	8	16	-1,6	-1,42	0,15	5,17	6,16	-1,16	1,36	**0,220**
3	16	9	48	144	-0,6	-0,53	0,35	12,28	12,28	3,72	13,82	**1,125**
4	10	16	40	160	0,4	0,35	0,37	13,29	13,29	-3,29	10,81	**0,813**
5	7	25	35	175	1,4	1,24	0,18	6,55	6,55	0,45	0,20	**0,031**
6	2	36	12	72	2,4	2,13	0,04	1,47	1,47	0,53	0,28	**0,191**
Σ	40		144	568					39,75	0,25	**χ² = 2,381**	

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Bx}{n} = \frac{144}{40} = 3{,}6 \qquad K = \frac{nb}{s} = \frac{40 \cdot 1}{1{,}128} = 35{,}46$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma Bx^2 - (\Sigma Bx)^2 / n}{n-1}} = \sqrt{\frac{568 - 144^2 / 40}{40-1}} = 1{,}128$$

$\chi^2 = 2{,}381 < 2{,}706 = \chi^2_{1;0,10}$

→ H_0 wird beibehalten

Für die praktische Anwendung des χ^2-Anpassungstests sollte gelten: 1) $n \geq 60$, 2) $k \geq 7$.