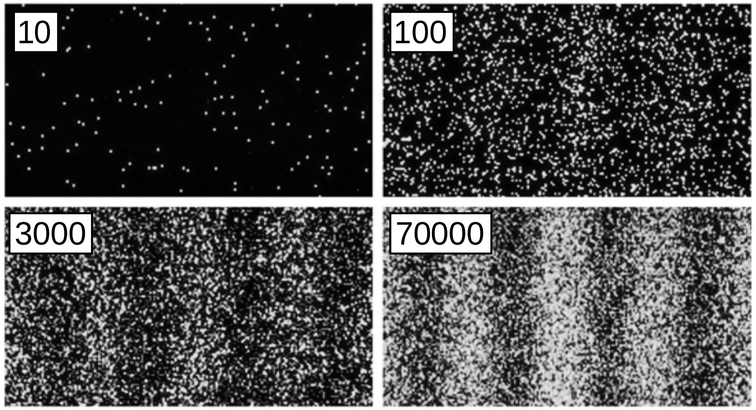
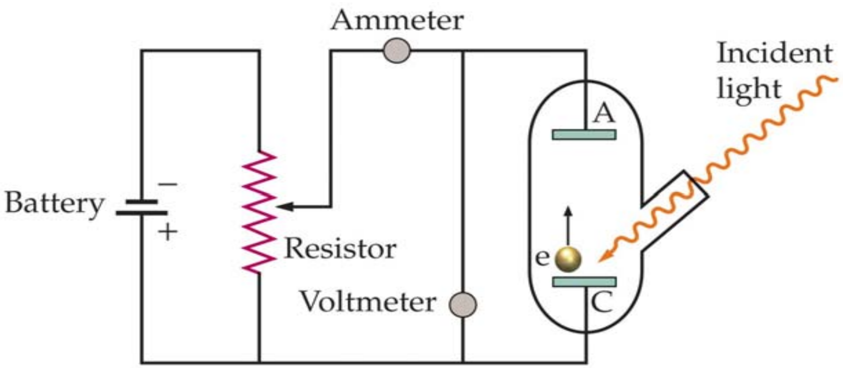
Moderne Physik

34. Wellen-Teilchen-Dualismus und Quantenphysik (Wave-particle duality and quantum physics)

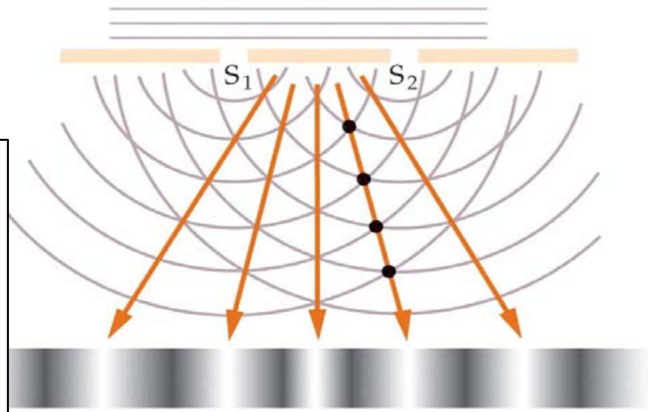
Tipler-Mosca Physik



Interferenzmuster durch Elektronen, die einen Doppelstalt passieren

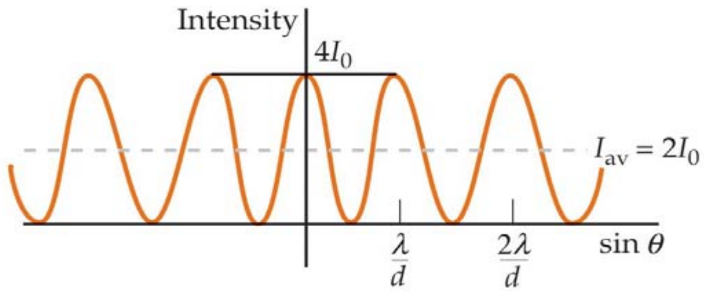


34.1 Licht (Light)



Doppelspaltexperiment von Thomas Young: zwei enge, parallele Spalte wirken als kohärente Lichtquellen $\Rightarrow$ Überlagerung der Wellen $\Rightarrow$ Interferenzmuster beobachtbar auf einem Schirm $\Leftrightarrow$ konstruktive Interferenz bei $d\sin\theta_m = m\lambda$ (siehe Teil 33.3)

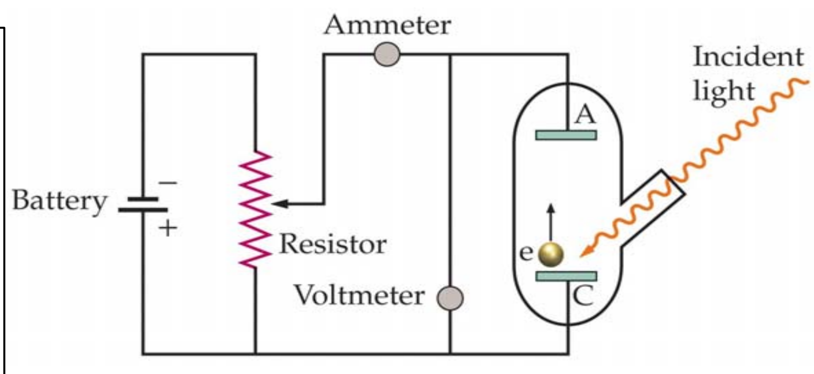
$\Rightarrow$ Licht breitet sich aus wie eine Welle



34.2 Die Teilchennatur des Lichts: Photonen (The particle-nature of light: photons)

Der photoelektrische Effekt

Schema der Apparatur zur Untersuchung des photoelektrischen Effektes:
Licht mit Energie $h\nu$ trifft auf die Kathode $\Rightarrow$ Elektronen werden emittiert $\Rightarrow$ Strom ~ Anzahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit auf die Anode A treffen $\Rightarrow$ veränderliche negative Spannung an der Anode angelegt $\Leftrightarrow$ Abstoßung $\Rightarrow$ nur solche Elektronen mit ausreichend hoher kinetischer Energie erreichen die Anode



Ergebnis des Experimentes: die maximale Energie der emittierten Elektronen bei derselben Wellenlänge des einfallenden Lichts ist stets gleich, unabhängig von der Intensität des auf die Kathode eintreffenden Lichts $\Rightarrow$
Erklärung von Einstein: die Lichtenergie ist quantisiert $\triangleq$ Photonen $\Rightarrow$

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad 34\text{-}1$$

EINSTEIN EQUATION FOR PHOTON ENERGY

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s} \qquad 34\text{-}2$$

PLANCK'S CONSTANT

Beispiel 34.1: Photonenenergie beim sichtbaren Licht

Gesucht: Photonenenergie für Licht bei Wellenlängen $\lambda = 400$ nm (violett) und $\lambda = 700$ nm (rot) $\Rightarrow$

Aus Gl. (34.1) $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$ mit Gl. (31.2) $hc = 1240$ eV nm $\Rightarrow$

für $\lambda = 400$ nm $\Rightarrow$ $E_{400\text{ nm}} = \dfrac{1240\text{ eV nm}}{400\text{ nm}} = 3.10$ eV , für $\lambda = 700$ nm $\Rightarrow$ $E_{700\text{ nm}} = \dfrac{1240\text{ eV nm}}{700\text{ nm}} = 1.77$ eV

Beispiel 34.2: Die Anzahl der Photonen pro Sekunde im Sonnenlicht　　mögliches Prüfungsbeispiel

Ein Lichtstrahl besteht aus einer Menge von Photonen, die jeweils die Energie $h\nu$ haben $\Rightarrow$
die Intensität I (Leistung pro Flächeneinheit) eines monochromatischen Lichtstrahls ist gleich der Anzahl N der Photonen pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit, multipliziert mit der Energie pro Photon $\Leftrightarrow$ $I = \dfrac{Nh\nu}{At}$

Maximale kinetische Energie der Elektronen, die durch den Lichteinfall aus der Kathode herausgeschlagen werden:

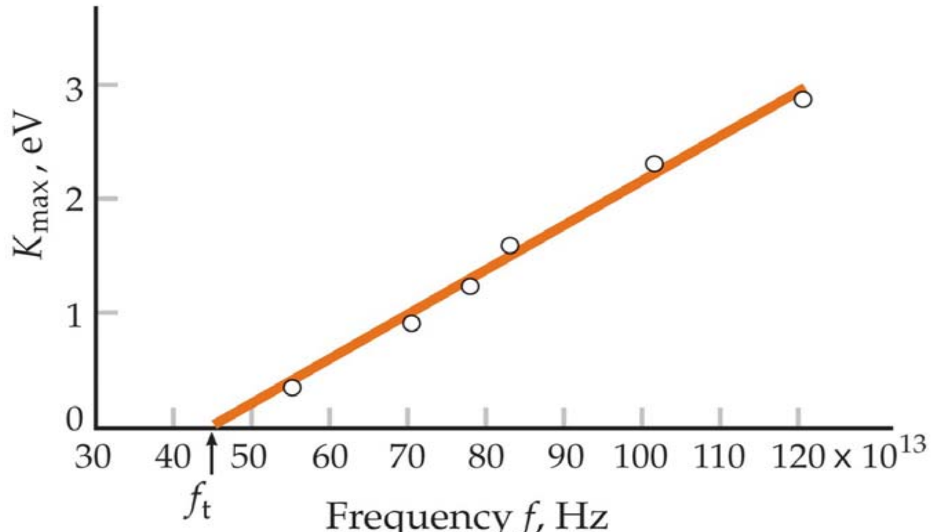
$$K_{\text{max}} = \left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{\text{max}} = hf - \phi \qquad 34\text{-}3$$

EINSTEIN'S PHOTOELECTRIC EQUATION

$\phi = W_{\text{Abl}}$: Ablösearbeit = Energie, die mindestens aufzubringen ist, um ein Elektron aus der Metalloberfläche herauszuschlagen, charakteristisch für das jeweilige Metall.

Meßwerte für die maximale Bewegungsenergie $E_{\text{kin,max}}$ der Elektronen in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz ν bzw. f beim photoelektrischen Effekt

$\Rightarrow$ Meßpunkte liegen auf einer Geraden mit Steigung h



Grenzfrequenz

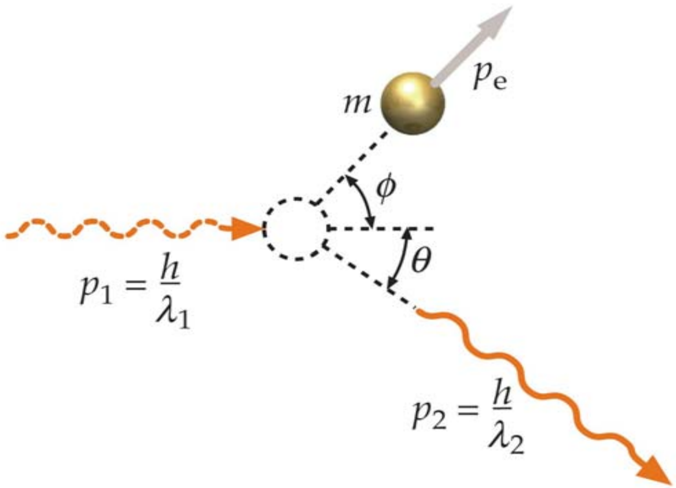
Bei der Grenzfrequenz ν_t ist $E_{\text{kin,max}} = 0 \;\Rightarrow\; \phi = W_{\text{Abl}} = h\nu_t = \dfrac{hc}{\lambda_t}$

Compton-Streuung

Zusammenhang zwischen Energie und Impuls einer elektromagnetischen Welle (siehe Teil 30.3) $E = pc \Rightarrow$ für ein Photon $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad 34\text{-}7$$

MOMENTUM OF A PHOTON



Die Streuung elektromagnetischer Strahlung durch ein Elektron kann als Stoß eines Photons mit Impuls $p_1 = h/\lambda_1$ auf ein ruhendes Elektron angesehen werden $\Rightarrow$ das gestreute Photon hat wegen des Rückstoßes des Elektrons eine geringere Energie und damit eine größere Wellenlänge λ_2 als das einfallende Elektron:

wegen Impulserhaltung $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e \quad \Rightarrow \vec{p}_e = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \quad \Rightarrow$

$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta$

Berücksichtigung des relativistischen Ausdruckes für den Zusammenhang zwischen Energie E und Impuls p (siehe Gl. R.17) $E = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$, wobei $m_\mathrm{e} c^2$ Ruheenergie des Elektrons.

Berücksichtigung der Energieerhaltung beim Stoß $\Rightarrow$ vor dem Stoß $E_\mathrm{tot,i} = p_1 c + m_\mathrm{e} c^2$; nach dem Stoß

$E_\mathrm{tot,f} = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \;\Rightarrow\; p_1 c + m_\mathrm{e} c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \;\Rightarrow\; p_1 c - p_2 c + m_\mathrm{e} c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \;\Rightarrow$ quadriert

$$\Rightarrow\; p_1^2 c^2 + p_2^2 c^2 + m_e^2 c^4 - 2 p_1 p_2 c^2 + 2\, p_1 c m_\mathrm{e} c^2 - 2\, p_2 c m_\mathrm{e} c^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

$$\Rightarrow\; p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 + 2\, p_1 c m_e - 2\, p_2 c m_\mathrm{e} = p_e^2$$

$\Rightarrow$ Eliminieren von p_e^2 $\;\Rightarrow\; p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 + 2\, p_1 c m_\mathrm{e} - 2\, p_2 c m_\mathrm{e} = p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 \cos\theta \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; -2 p_1 p_2 + 2\, p_1 c m_\mathrm{e} - 2\, p_2 c m_\mathrm{e} = -2 p_1 p_2 \cos\theta \;\Rightarrow\; 2\, p_1 c m_\mathrm{e} - 2\, p_2 c m_\mathrm{e} = 2 p_1 p_2 - 2 p_1 p_2 \cos\theta \;\Rightarrow$$

$\dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{m_\mathrm{e} c}(1 - \cos\theta) \;\Rightarrow$ mit Gl. (34.7) $p = \dfrac{h}{\lambda} \;\Rightarrow\; \lambda_2 - \lambda_1 = \dfrac{h}{m_\mathrm{e} c}(1 - \cos\theta)$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_\mathrm{e} c}(1 - \cos\theta) \qquad \text{34-11}$$

COMPTON EQUATION

Compton-Wellenlänge $\lambda_\mathrm{Compton} = \dfrac{h}{m_\mathrm{e} c} = \dfrac{hc}{m_\mathrm{e} c^2} = \dfrac{1240\ \mathrm{eV\ nm}}{5.11 \times 10^5\ \mathrm{eV}} = 2.43 \times 10^{-12}\ \mathrm{m} = 2.43\ \mathrm{pm}$

Beispiel 34.3: Wellenlängenzunahme bei der Compton-Streuung

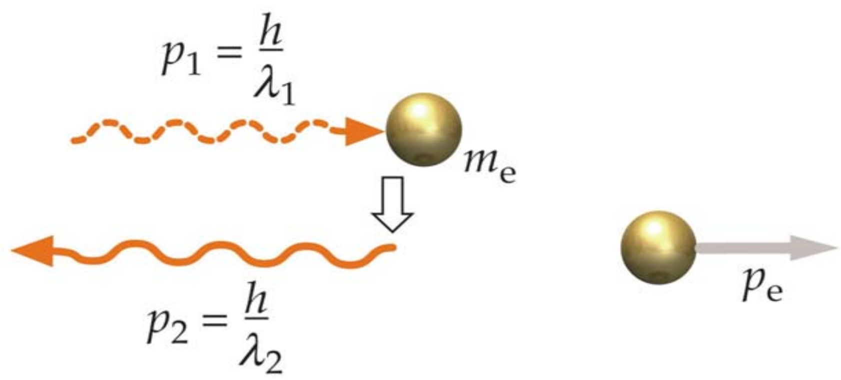
Röntgenphoton mit $\lambda_1 = 6$ pm stößt frontal auf ruhendes Elektron $\Rightarrow$ gestreutes Photon tritt in entgegengesetzter Richtung aus $\Rightarrow$ Gesucht: a) Wellenlänge λ_2 des gestreuten Photons, b) kinetische Energie des zurückgestoßenen Elektrons $\Rightarrow$

Teil a) aus Gl. (34.11) $\lambda_2 - \lambda_1 = \dfrac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \Rightarrow$

$\lambda_2 - \lambda_1 = (2.43\text{ nm})(1\text{-}\cos 180°) = 4.86\text{ nm};$

Teil b) aus Gl. (R.15) $E = E_{\text{kin,e}} + m_e c^2$ und wegen Energieerhaltung $E_1 + m_e c^2 = E_2 + E_{\text{kin,e}} + m_e c^2 \Rightarrow$

$$E_{\text{kin,e}} = E_1 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}$$



mit $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 6.00\text{ pm} + 4.86\text{ pm} = 10.86\text{ pm} \Rightarrow$

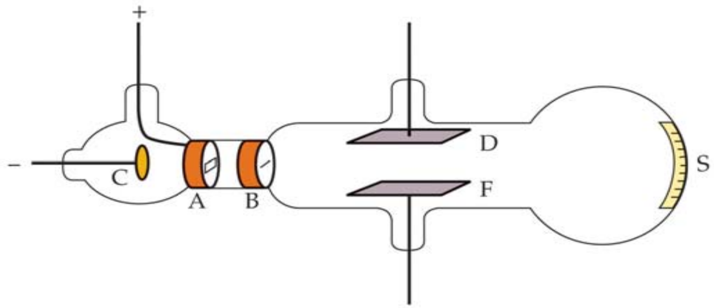
$$E_{\text{kin,e}} = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = (1240\text{ eV nm})\left(\frac{1}{6.00\text{ pm}} - \frac{1}{10.86\text{ pm}}\right) = 207\text{ keV} - 114\text{ keV} = 93\text{ keV}$$

34.3 Energiequantisierung (Energy quantization in atoms)

Angeregte Atome in einem Gas emittieren Licht mit bestimmten Wellenlängen, die charakteristisch sind für das Element oder die Verbindung $\Rightarrow$ durch $E = h\nu = hc/\lambda$ $\Rightarrow$ nur diskreter Satz von Energien möglich $\Rightarrow$ wegen Energieerhaltung kann die innere Energie von Atomen nur einen Satz von gewissen Werten haben $\Rightarrow$ die innere Energie des Atoms ist quantisiert $\Rightarrow$ Bohr'sches Atommodel siehe Teil 36.2

34.4 Elektronen und Materiewellen (Electrons and matter waves)

Strahlen aus Kathodenstrahlröhren bestehen aus geladene Teilchen mit Ladungs-Masse-Verhältnis q/m $\Rightarrow$ Teilchen mit gleichem q/m können mit Kathoden aus beliebigen Materialien erzeugt werden $\Rightarrow$ Elektronen müssen ein integraler Bestandteil der Materie sein.



Die De-Broglie-Hypothese

Licht hat sowohl Wellen- wie Teilcheneigenschaften $\Leftrightarrow$
Materie (Elektronen, Protonen) hat sowohl Wellen- wie Teilcheneigenschaften

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{34-13}$$

DE BROGLIE RELATION FOR THE WAVELENGTH OF ELECTRON WAVES

$$f = \frac{E}{h} \qquad \text{34-14}$$

DE BROGLIE RELATION FOR THE FREQUENCY OF ELECTRON WAVES

Beispiel 34.4: Die de-Broglie'sche Wellenlänge

Gesucht: De-Broglie-Wellenlänge eines Teilchens mit $m = 10^{-6}$ g und $v = 10^{-6}$ m s^{-1}:

aus Gl. (34.13) $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J s}}{\left(10^{-9}\ \text{kg}\right)\left(10^{-6}\ \text{m s}^{-1}\right)} = 6.63 \times 10^{-19}\ \text{m}$

Bei makroskopischen Gegenständen ist die de-Broglie-Wellenlänge so klein, daß unter gewöhnlichen Bedingungen unmöglich ist Interferenz oder Beugung zu beobachten.

Bei mikroskopischen Gegenständen ist die de-Broglie-Wellenlänge so groß, daß unter gewöhnlichen Bedingungen möglich ist Interferenz oder Beugung zu beobachten.

Für nicht relativistisches Teilchen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mE_{\text{kin}}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E_{\text{kin}}}}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2K}} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2mc^2K}} \qquad 34\text{-}15$$

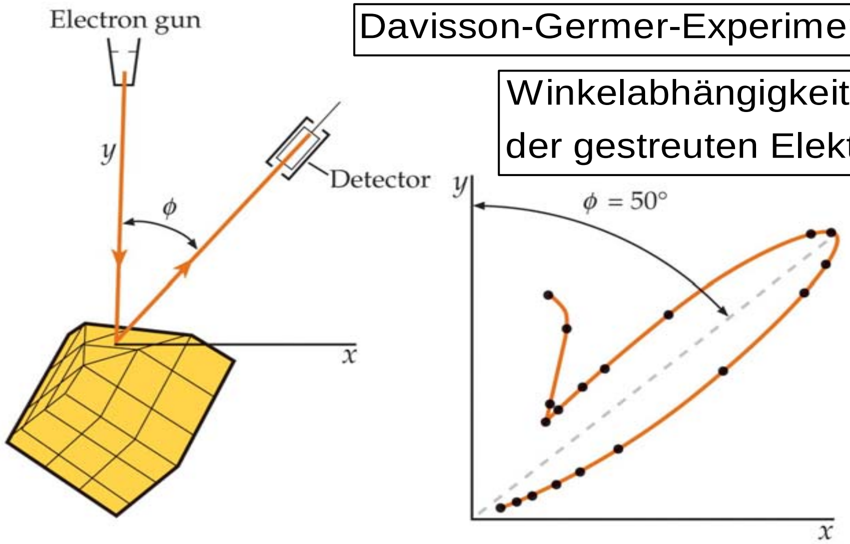
WAVELENGTH ASSOCIATED WITH A PARTICLE OF MASS *M*

mit mc^2=0.511 MeV $\Rightarrow$

$$\lambda = \frac{1.226}{\sqrt{K}}\ \text{nm}, \quad K \text{ in electron volts} \qquad 34\text{-}16$$

ELECTRON WAVELENGTH

Interferenz und Beugung von Elektronen



Davisson-Germer-Experiment

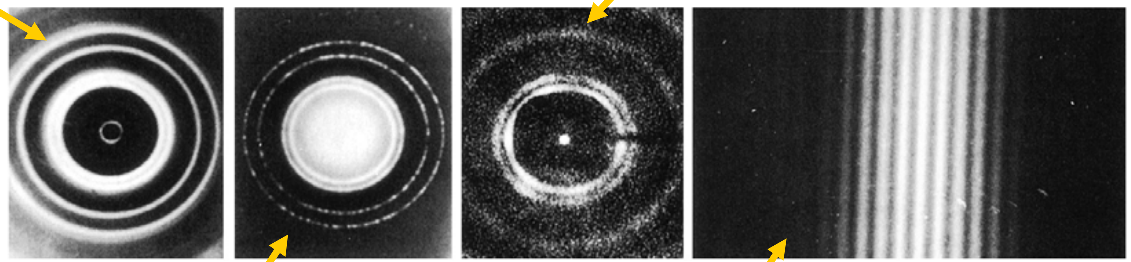
Winkelabhängigkeit der Intensität der gestreuten Elektronen.

Das Maximum liegt bei demjenigen Winkel, der bei der Beugung von Wellen mit der Wellenlänge λ gemäß $\lambda = \frac{1.226\ \text{nm}}{\sqrt{E_{\text{kin}}}}$ mit E_{kin} in eV zu erwarten ist.

Elektronen treffen auf einen Nickelkristall und werden in einem Detektor gebeugt.

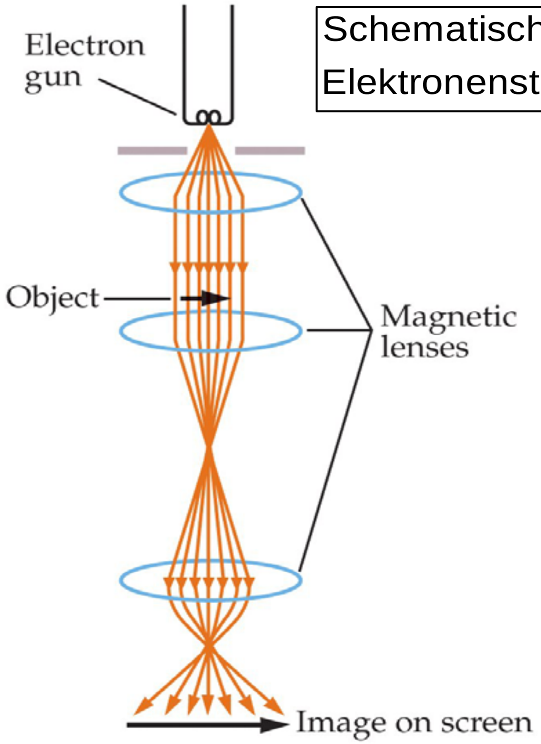
Beugungsmuster von Röntgenstrahlen bei $\lambda = 0.071$ nm durch eine Aluminiumfolie

Beugungsmuster von Neutronen mit $E_{\text{kin}} = 0.0568$ eV $\triangleq$ $\lambda = 0.12$ durch eine Kupferfolie

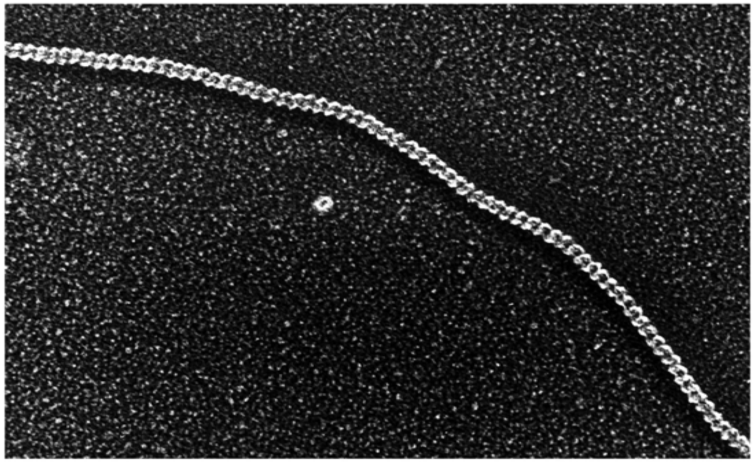


Beugungsmuster von Elektronen mit $E_{\text{kin}} = 600$ eV $\triangleq$ $\lambda = 0.050$ durch eine Aluminiumfolie

Beugungs- und Interferenzmuster erzeugt von Elektronen beim Doppelspalt



Schematischer Aufbau eines Elektronenmikroskops:
Elektronenstrahlen anstelle von Lichtstrahlen werden dazu benutzt, kleine Objekte abzubilden.



Elektronenmikrsoskopische Aufnahme eines DNA-Molekuls

http://www.smt.zeiss.com/nts

Stehende Wellen und Energiequantisierung

Ist die Energie E mit der Frequenz ν einer stehenden Wellen über $E = h\nu$ assoziert, dann verdeutlich dies, daß stehende Wellen und Energiequantisierung miteinander zusammenhängen $\Rightarrow$ Schrödinger $\Rightarrow$ Entwicklung der Quantenmechanik $\Leftrightarrow$ Schrödinger-Gleichung (siehe Teil 35).

Die Quantenmechanik ist die Grundlage des derzeitgen Verständnisses der Strukturen und der Prozesse

34.5 Die Interpretation der Wellenfunktion (The interpretation of the wave function)

Die Schrödinger-Gleichung beschreibt ein einzelnes Teilchen $\Rightarrow$ das Quadrat der Wellenfunktion ψ für ein Teilchen gibt an die Wahrscheinlichkeitsdichte (Wahrscheinlichkeit pro Volumseinheit), das Teilchen an einer bestimmten Position zu finden.

$$P(x) = \psi^2(x) \qquad 34\text{-}17$$

PROBABILITY DENSITY

Die Wellenfunktion ψ hängt generell von der Zeit und vom Ort ab: $\psi(x,t)$ $\Rightarrow$ bei stehenden Wellen ist ψ zeitunabhängig: $\psi(x)$.

Normierungsbedingung für die Wellenfunktion: Wenn das Teilchen überhaupt vorhanden ist, dann muß die Wahrscheinlichkeit, es irgendwo zu finden, gleich eins sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \, dx = 1 \qquad 34\text{-}18$$

NORMALIZATION CONDITION

$\Rightarrow$ erfüllt ψ diese Normierungsbedingung $\Rightarrow$ dann muß $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$ sein

Beispiel 34.5: Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines klassischen Teilchens

Punktförmiges Teilchen bewegt sich zwischen zwei Wänden bei $x = 0$ cm und $x = 8$ cm mit konstanter Geschwindigkeit hin und her $\Rightarrow$ Gesucht: a) Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$, b) Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei $x = 2$ cm zu finden, c) Wahrscheinlichkeit bei 3.0 cm $\leq x \leq$ 3.4 cm $\Rightarrow$

Teil a) für 0 cm < x < 8 cm ist $P(x) = P_0 = \text{konstant}$

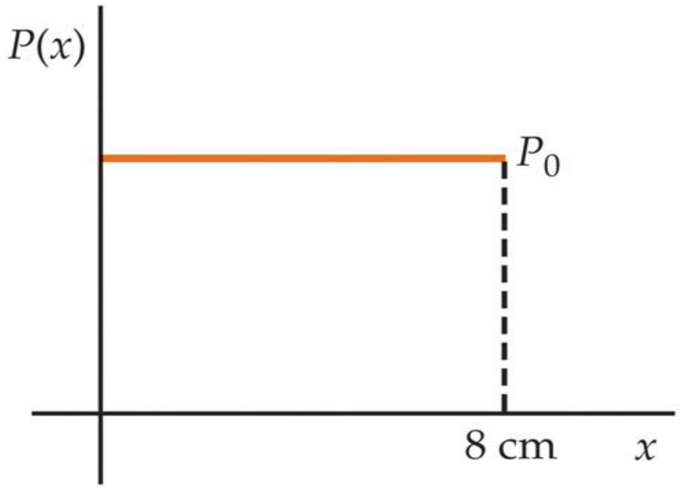
für x < 0 cm und x > 8 cm ist $P(x) = 0 = \text{konstant}$

Anwendung der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\mathrm{d}x = \int_{0\text{ cm}}^{8\text{ cm}} P_0 \mathrm{d}x = P_0\,(8\text{ cm}) = 1 \;\Rightarrow\; P_0 = \frac{1}{8\text{ cm}}$;

Teil b) Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall Δx zu finden: $P_0 \Delta x \;\Rightarrow\; \Delta x = 0\text{ cm} \;\Rightarrow$

Wahrscheninlichkeit = 0

Teil c) Wahrscheinlichkeit $P_0 \Delta x = \frac{1}{8\text{ cm}}(0.4\text{ cm}) = 0.05$

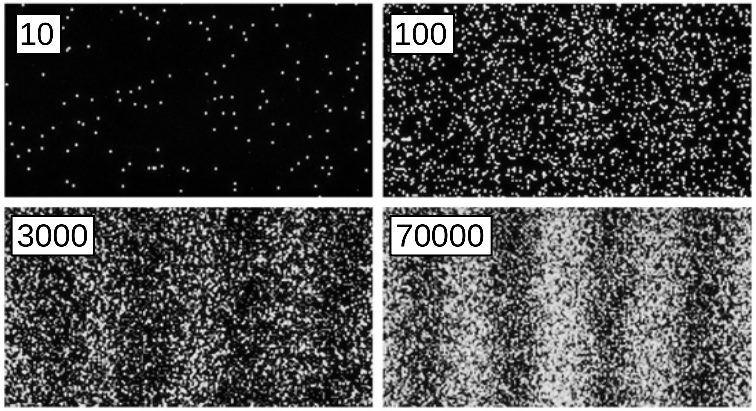


34.6 Der Welle-Teilchen-Dualismus (Wave-particle duality)

Everything propagates like a wave and exchanges energy like a particle.

Das Doppelspaltexperiment

Interferenzmuster durch Elektronen, die einen Doppelstalt passieren



Die Heisenberg'sche Unschärferelation

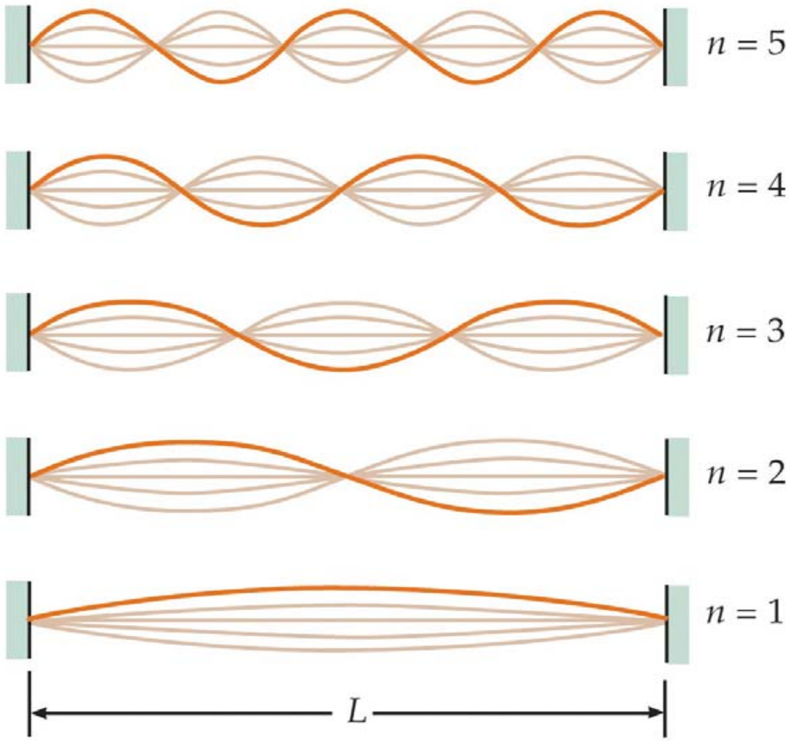
Es ist prinzipiell unmöglich, sowohl die Position als auch den Impuls eines Teilchens gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit zu messen $\Rightarrow$
die Position kann nur mit einer Unsicherheit Δx in der Größenordnung von λ gemessen werden, aufgrund von Beugungseffekten $\Leftrightarrow$ $\Delta x \approx \lambda$;
Der Impuls kann nur mit einer Unsicherheit Δp in der Größenordnung von h/λ gemessen werden, aufgrund der $\Leftrightarrow$ $\Delta p \approx \dfrac{h}{\lambda}$

$\Rightarrow$ die Unschärfe der Impulmessung ist groß, wenn λ klein ist, und die Unschärfe der Positionsmessung ist groß, wenn λ groß ist $\Rightarrow$ $\Delta x \Delta p \approx \lambda \dfrac{h}{\lambda} = h$;

genauere Formulierung mit Hilfe von Δx und Δp als Standardabweichungen der Position bzw. des Impulses $\Rightarrow$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

34.7 Ein Teilchen im Kasten (A particle in a box)



Die Bedingung für stehende Wellen auf einer Saite, die an beiden Enden fixiert ist, ist die gleiche wie die für stehende Wellen beim Teilchen im Kasten.

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad 34\text{-}20$$

STANDING-WAVE CONDITION FOR A PARTICLE IN A BOX OF LENGTH L

Gesamtenergie des Teilchens = Bewegungsenergie

$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ mit Gl. (34.13) $\lambda = \frac{h}{p}$ bzw. $p = \frac{h}{\lambda}$ $\Rightarrow$

$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{(h/\lambda_n)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_n^2}$ $\Rightarrow$ für stehende Welle $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

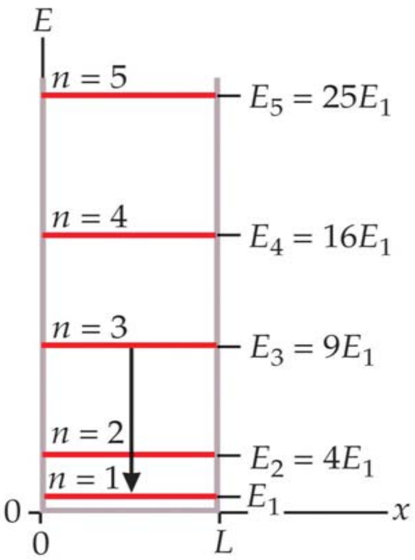
$\Rightarrow$ erlaubte Energien $E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2} = n^2 E_1$ wobei $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$

$$E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2} = n^2 E_1 \qquad 34\text{-}21$$

ALLOWED ENERGIES FOR A PARTICLE IN A BOX

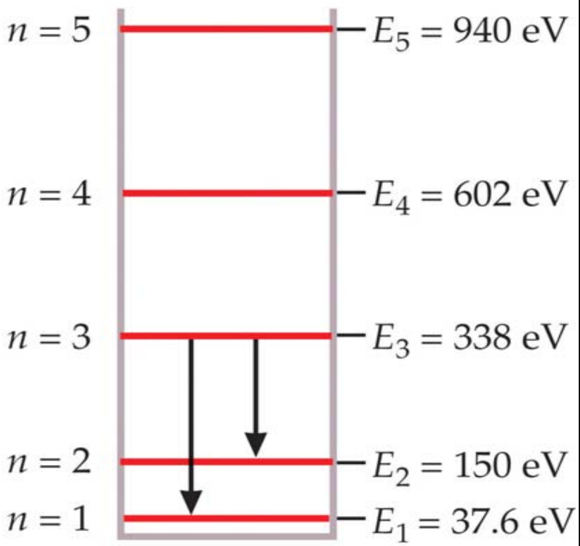
$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \qquad 34\text{-}22$$

GROUND-STATE ENERGY FOR A PARTICLE IN A BOX



Die Bedingung $\psi = 0$ bei $x = 0$ und $x = L$ ist eine sogenannte Randbedingung $\Leftrightarrow$ Randbedingungen führen in der Quantenmechanik zur Quantisierung von Energie $\Rightarrow$ Ist ein Teilchen räumlich auf einem bestimmten Bereich beschränkt, dann besitzt es eine minimale kinetische Energie = Nullpunktsenergie.

Beispiel 34.6: Photonenemission durch ein Elektron im Kasten



Elektron in eindimensionalem Kasten mit $L = 0.1\,\text{nm}$ $\Rightarrow$ Gesucht: a) Energie E_1 des Grundzustands, b) Energie E_2 bis E_4, c) Energie des emittierten Photons ausgehend von Zustand mit $n = 3$ $\Rightarrow$

Teil a) aus Gl. (34.22) $E_1 = \dfrac{h^2}{8mL^2} = \dfrac{(hc)^2}{8mc^2L^2} = \dfrac{(1240\text{ eV nm})^2}{8\left(0.511\times10^6\text{ eV}\right)(0.1\,\text{nm})^2} = 37.6\text{ eV}$

Teil b) aus Gl. (34.22) $E_n = n^2E_1 \Rightarrow E_n = 4E_1,\ E_3 = 9E_1,\ E_4 = 16E_1,\ E_5 = 25E_1$

Teil c) aus Gl. (34.24) $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{hc}{|E_f - E_i|} \Rightarrow$

von $n = 3$ nach $n = 2$: $\lambda = \dfrac{hc}{|4E_1 - 9E_1|} = \dfrac{hc}{5E_1} = \dfrac{1240\text{ eV nm}}{5(37.6\text{ eV})} = 6.60\text{ nm}$

von $n = 3$ nach $n = 1$: $\lambda = \dfrac{hc}{|E_1 - 9E_1|} = \dfrac{hc}{8E_1} = \dfrac{1240\text{ eV nm}}{8(37.6\text{ eV})} = 4.13\text{ nm}$

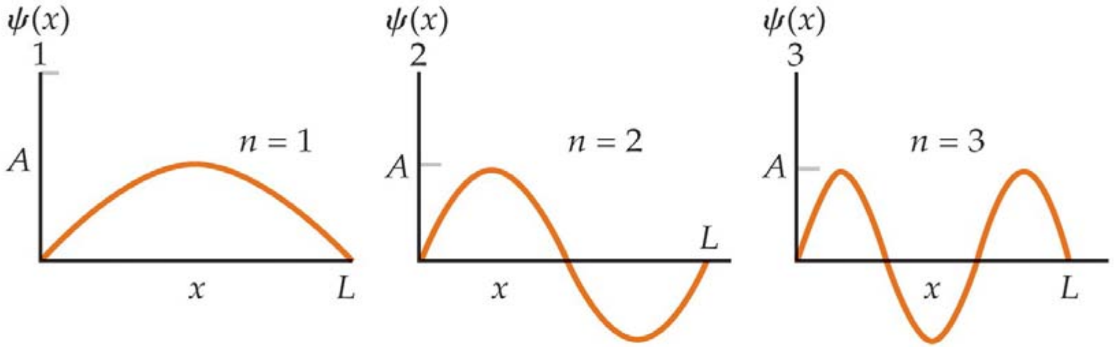
Wellenfunktion stehender Wellen

Wellenfunktion für ein Teilchen im Kasten (siehe Teil 35.1): $\psi(x) = A_n \sin k_n x$ wobei $k_n = 2\pi/\lambda_n$ Wellenzahl $\Rightarrow$

mit Gl. (34.20) $L = n\dfrac{\lambda_n}{2}$ bzw. $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ $\Rightarrow$ $k_n = n\dfrac{2\pi}{2L} = n\dfrac{\pi}{L}$ $\Rightarrow$ $\psi(x) = A_n \sin\left(n\pi\dfrac{x}{L}\right)$ $\Rightarrow$

mit Normierungsbedingung Gl. (34.18) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^L A_n^2 \sin^2\left(n\pi\dfrac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = 1$ $\Rightarrow$

Integration $\Rightarrow$ $A_n^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin\left(2n\pi\dfrac{x}{L}\right)}{\dfrac{4n\pi}{L}}\right)\Bigg|_0^L = A_n^2\left(\dfrac{L}{2} - 0 - 0 + 0\right) = A_n^2\dfrac{L}{2} = 1$ $\Rightarrow$ $A_n = \sqrt{\dfrac{2}{L}}$ $\Rightarrow$

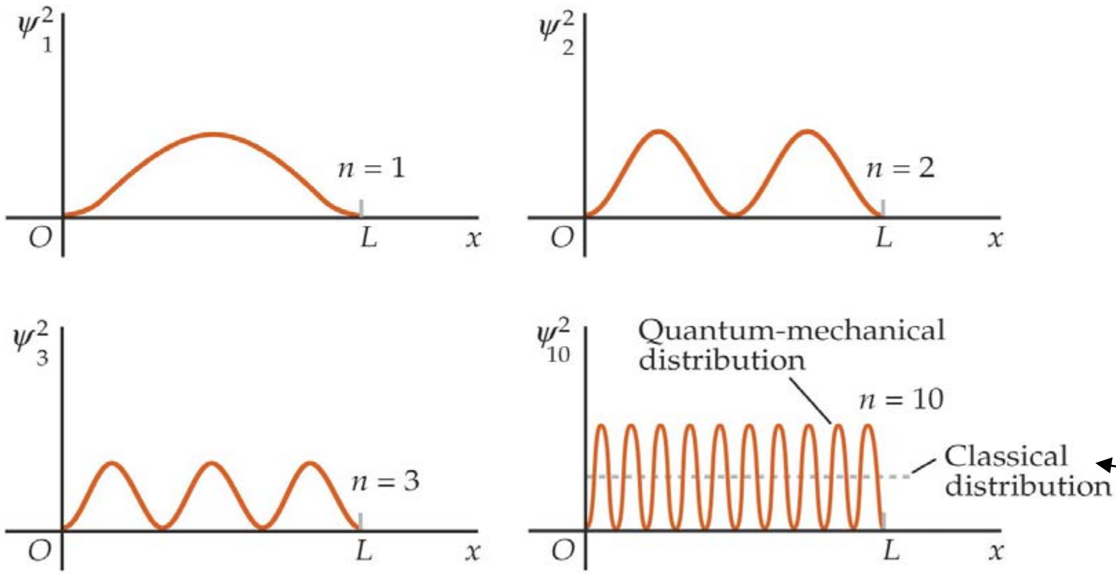


$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) \qquad 34\text{-}25$$

WAVE FUNCTIONS FOR A PARTICLE IN A BOX

Wellenfunktionen stehender Wellen für $n = 1$, $n = 2$, und $n = 3$

Zahl n: Quantenzahl $\Leftrightarrow$ sie charakterisiert die Wellenfunktion für einen bestimmten Zustand und damit die Energie dieses Zustands



Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ψ^2 in Abhängigkeit von x für ein Teilchen im Kasten der Länge L

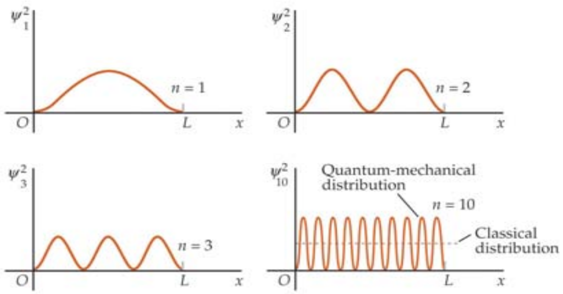
Das Teilchen ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo im Kasten zu finden

In the limit of very large quantum numbers, the classical calculation and the quantum calculation must yield the same results.

BOHR'S CORRESPONDENCE PRINCIPLE

Sehr große Quantenzahlen entsprechen sehr hohe Energien $\Rightarrow$ relative Differenz der Energien benachbarter Quantenzustände sehr gering $\Leftrightarrow$ die Quantisierung der Energie spielt dann nur eine geringe Rolle.

Darstellung des Elektrons in einem gebundenen Zustand: Ladungswolke mit einer Ladungsdichte $\sim \psi^2$



34.8 Erwartungswerte (Expectation values)

Die Wellennatur der Materie bei mikroskopischen Systemen erlaubt allenfalls die Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der ein bestimmter Wert der Position x zu messen ist $\Rightarrow$
der Ewartungswert $\langle x \rangle$ von x ist gleich dem Mittelwert von x, der bei der Positionsmessung an sehr vielen Teilchen mit der gleichen Wellenfunktion $\psi(x)$ zu erwarten ist:

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^2(x)\,dx \qquad 34\text{-}26$$

EXPECTATION VALUE OF X DEFINED

dabei ist $\psi^2(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Intervall dx zu finden

Erwartungswert für eine beliebige Funktion $f(x)$:

$$< f(x) > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi^2(x)\,dx \qquad 34\text{-}27$$

EXPECTATION VALUE OF $F(X)$ DEFINED

Berechnung von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten

Beispiel 34.7: Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem bestimmten Teil des kastens zu finden

Teilchen im Grundzustand in einem eindimensionalen Kasten der Länge $L \Rightarrow$

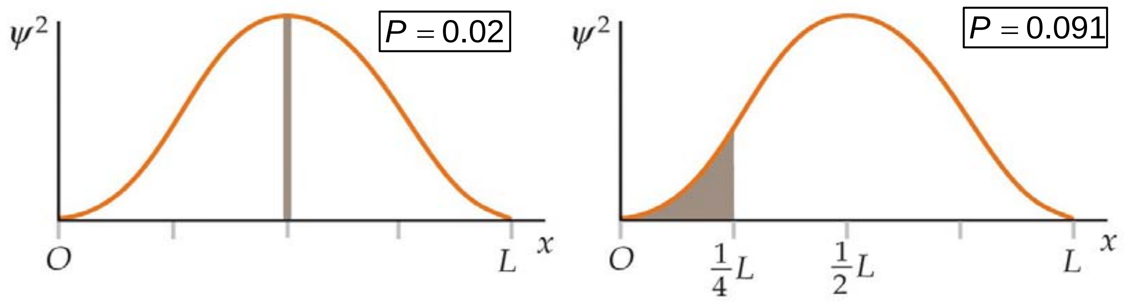
gesucht: Aufenthaltswahrscheinlichkeit a) im Intervall $\Delta x = 0.01L$ zentriert bei $x = L/2$, b) im Intervall $0 < x < \frac{1}{4}L$:

Teil a) mit Gl. (34.25) $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right) \Rightarrow$ Höhe bei $x = L/2$: $\psi_1(L/2) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\pi\frac{L}{2L}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \Rightarrow$

Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\psi_1^2(L/2) = \frac{2}{L} \Rightarrow$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\psi_1^2(L/2)\Delta x = \frac{2}{L}0.01L = 0.02$

Teil b) $P = \int_0^{\frac{L}{4}}\psi_1^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{L}{4}}\frac{2}{L}\sin^2\left(\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x \Rightarrow$ mit Substitution $\theta = \pi\frac{x}{L}$ bzw. $\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{L}\mathrm{d}x \Rightarrow P = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{L}\sin^2\theta\frac{L}{\pi}\mathrm{d}\theta =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\mathrm{d}x \Rightarrow$ mit z.B. http://www.mathe-online.at/Mathematica/ $= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - 0 + 0\right) = 0.091$

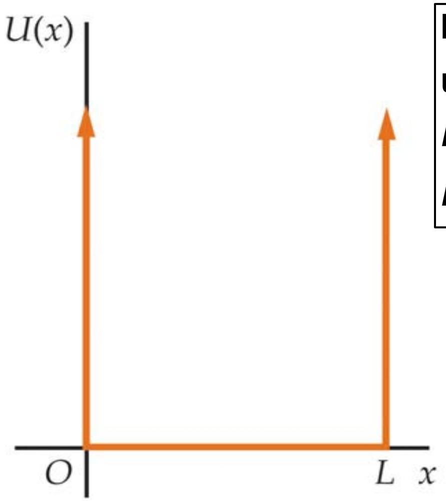


http://www.mathe-online.at/Mathematica/

Beispiel 34.8: Berechnung von Erwartungswerten mögliches Prüfungsbeispiel

34.9 Energiequantisierung in anderen Systemen (Energy quantization in other systems)

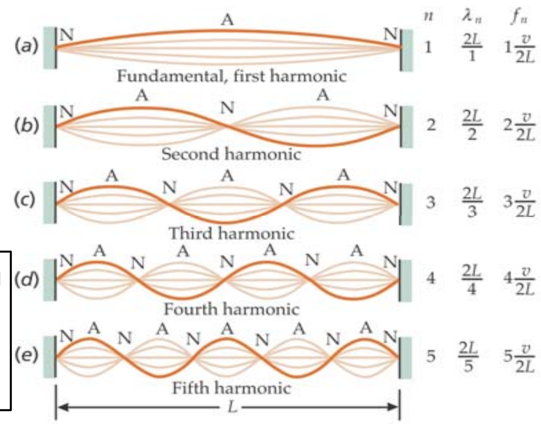
Die quantisierten Energien eines Systems oder Teilchens kann allgemein durch Lösung der Schrödinger-Gleichung bestimmt werden, unter Berücksichtigung der potentiellen Energie des Teilchens.



Potentialverlauf bei einem Kasten mit unendlich hohen Wänden:

$E_{\text{pot}}(x) = 0$ für $0 < x < d$ und

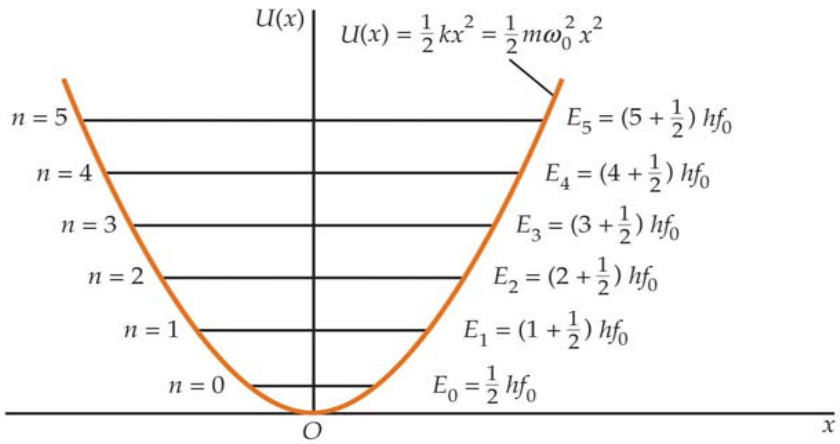
$E_{\text{pot}}(x) = \infty$ für $x < 0$ oder $x > d$



Die Wellenfunktionen und die quantisierten Frequenzen sind diesselben wie bei einer beidseitig fixierten Seite (siehe Teil 16.2)

Der harmonische Oszillator

$$E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2}k_F x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad \text{wobei } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$$



Aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung $\Rightarrow$ normierbare Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ treten nur für diskrete Werte E_n der Energie auf: $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$ wobei

ω_0 Eigenfrequenz des Oszillators gemäß der klassichen Theorie.

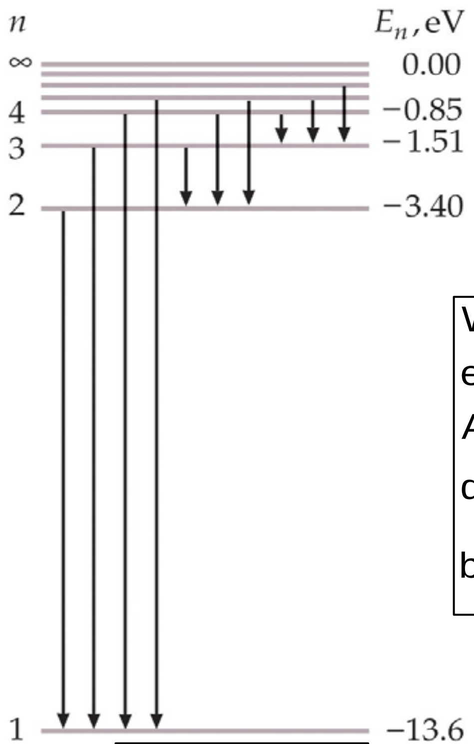
Energetischer Abstand zwischen den Energieniveaus E_n:

$$E_{n+1} - E_n = \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)h\nu_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu_0 = h\nu_0$$

Potentielle Energie $E_{\text{pot}}(x)$ des harmonischen Oszillators in Abhängigkeit von der Auslenkung x $\Rightarrow$ die Energieniveaus sind äquidistant.

Der Wasserstoffatom

Ionisation bei $h\nu > 13.6$ eV



Grundzustand

Energieniveaus des Wasserstoffatoms

Wasserstoffatom: ein Elektron ist durch die elektrostatische Anziehungskraft an ein Proton gebunden $\Rightarrow$ die potentielle Energie ist umgekehrt proportional zum Abstand $\Leftrightarrow$ für $r = \infty$ ist $E_{\text{pot}} = 0$ gesetzt $\Rightarrow$ für $r < \infty$ ist $E_{\text{pot}} < 0$ $\Rightarrow$ die Energien E_n des Elektrons im Wasserstoffatom durch eine Quantenzahl n beschrieben werden: $E_n = -\dfrac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$ wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$

NIST Atomic Spectra Database
http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/index.html

36. Quantemechanik: Grundwissen