

# ELEKTRIZITÄT UND MAGNETISMUS

## Tipler-Mosca 27. Quellen des Magnetfeldes (Sources of the magnetic field)

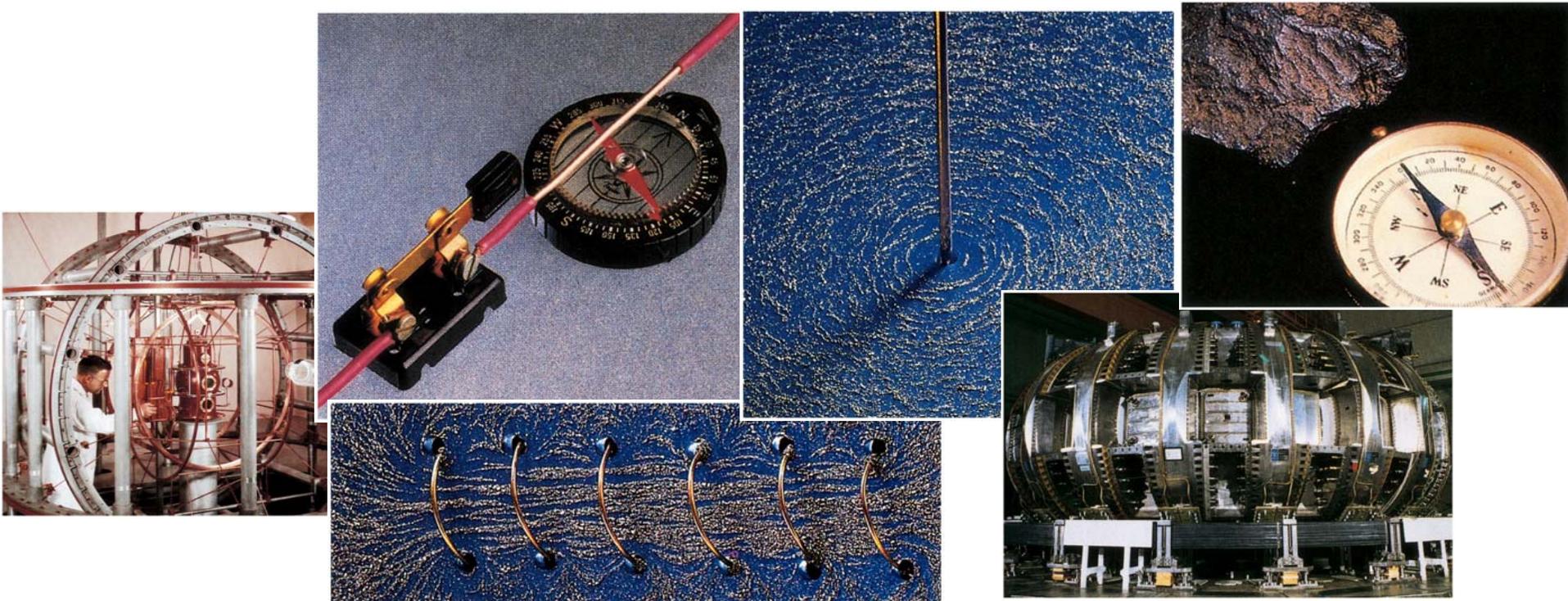
27.1 Das Magnetfeld bewegter Punktladungen (The magnetic field of moving point charges)

27.2 Das Magnetfeld von Strömen: Das Biot-Savart'sche Gesetz (The magnetic field of currents: The Biot-Savart Law)

27.3 Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder (Gauss's law for magnetism)

27.4 Das Ampère'sche Gesetz (Ampère's law)

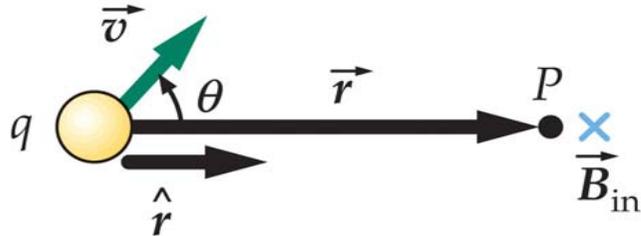
27.5 Magnetismus in Materie (Magnetism in matter)





27.1 Das Magnetfeld bewegter Punktladungen (The magnetic field of moving point charges)

Eine Punktladung  $q$ , die sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt ( $v \ll c$ ), erzeugt im Raum im Aufpunkt  $P$  ein Magnetfeld  $\vec{B}$ , das senkrecht zu  $\vec{v}$  und senkrecht zum Einheitsvektor  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$  steht



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad 27-1$$

MAGNETIC FIELD OF A MOVING POINT CHARGE

Proportionalitätskonstante  $\mu_0$  : magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des Vakuums,  
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$

Das Magnetfeld bewegter Punktladungen ist sehr schwach

Beispiel 27.1: Das Magnetfeld einer Punktladung

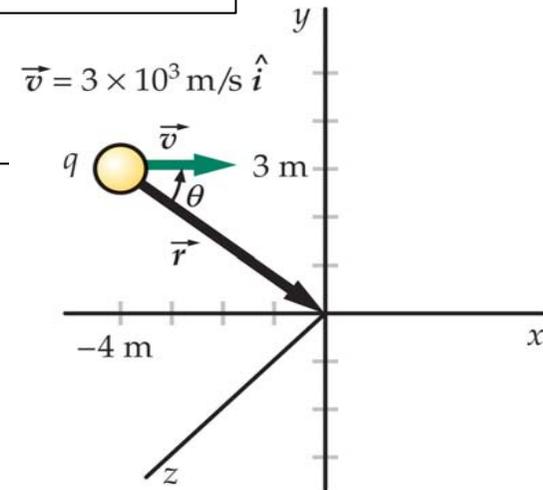
Massenpunkt mit Ladung  $q = 4.5 \text{ nC}$  bewegt sich mit  $\vec{v} = (3 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}) \vec{e}_x$ .  
 Wenn die Ladung sich bei  $x = -4 \text{ m}$ ,  $y = +3 \text{ m}$  befindet  $\Rightarrow$   
 gesucht: Magnetfeld im Ursprung  $\Rightarrow$

mit  $\vec{r} = (4 \text{ m})\vec{e}_x + (-3 \text{ m})\vec{e}_y \Rightarrow |\vec{r}| = r = \sqrt{(4 \text{ m})^2 + (-3 \text{ m})^2} = 5 \text{ m} \Rightarrow$

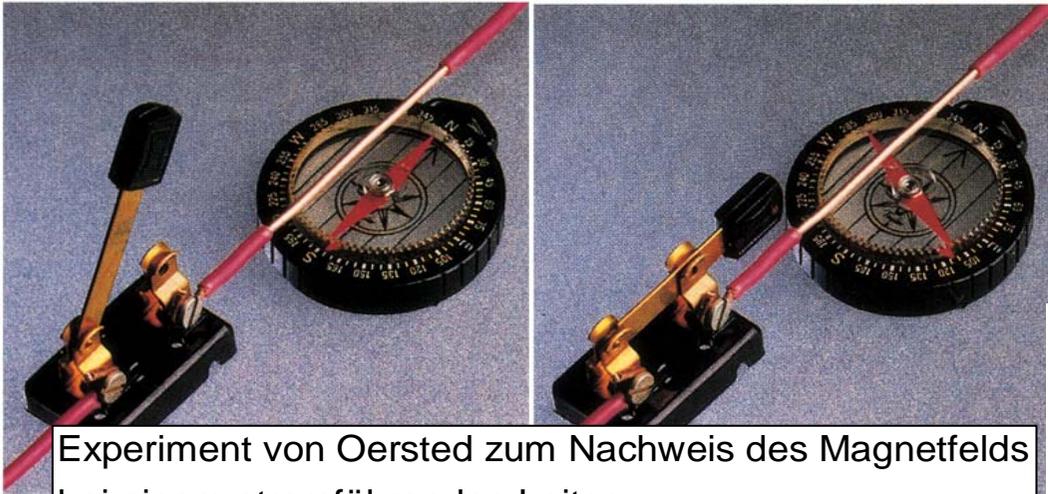
$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = 0.8\vec{e}_x - 0.6\vec{e}_y \Rightarrow$  aus Gl. (27.1)  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv\vec{e}_x \times [0.8\vec{e}_x - 0.6\vec{e}_y]}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-0.6qv\vec{e}_z}{r^2} = (10^7 \text{ T m A}^{-1}) \frac{-0.6(4.5 \text{ nC})(3 \times 10^3 \text{ m s}^{-1})}{(5 \text{ m})^2} \vec{e}_z =$$

$$= (-3.24 \times 10^{-14} \text{ T}) \vec{e}_z$$



27.2 Das Magnetfeld von Strömen: Das Biot-Savart'sche Gesetz (The magnetic field of currents: The Biot-Savart Law)



Experiment von Oersted zum Nachweis des Magnetfelds bei einem stromführenden Leiter

$$\text{aus Gl. (27.1) } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\text{mit } q\vec{v} = Id\vec{\ell} \text{ (siehe Gl. (26.5)) } \Rightarrow$$

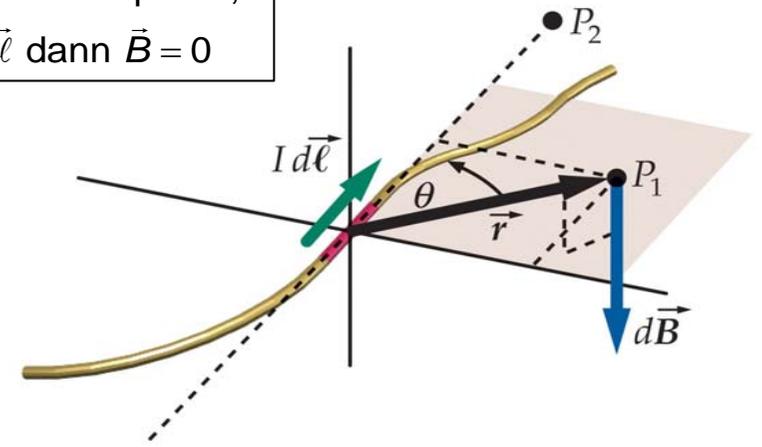
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad 27-3$$

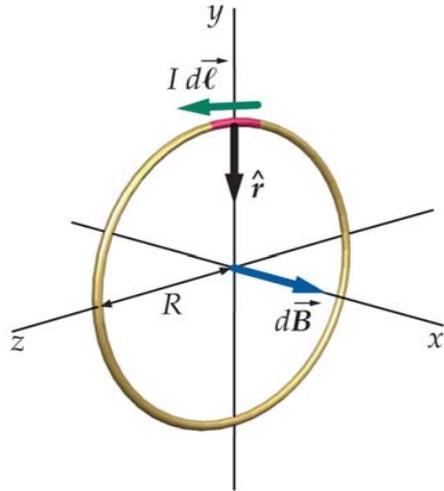
BIOT-SAVART LAW

Die Quelle des Magnetfelds  $\vec{B}$  ist eine bewegte Ladung  $q\vec{v}$  oder ein Stromelement  $Id\vec{\ell}$ , die Quelle eines elektrostatischen Feldes  $\vec{E}$  ist eine Ladung  $q$ .  
 In beiden Fällen nimmt die Stärke des Feldes quadratisch mit der Entfernung ab.  
 Das elektrische Feld  $\vec{E}$  zeigt radial in Richtung  $\hat{r}$  von der Punktladung zum Feldpunkt, das Magnetfeld  $\vec{B}$  steht senkrecht auf  $\hat{r}$  und  $\vec{v}$  bzw.  $d\vec{\ell}$ , bzw. wenn  $\hat{r} \parallel d\vec{\ell}$  dann  $\vec{B} = 0$

Das in einem Stromkreis erzeugte Magnetfeld wird berechnet aus den Feldern zu jedem Stromelement und anschließend Summation bzw. Integration



Magnetfelder von Leiterschleifen



Magnetfeld im Mittelpunkt einer Leiterschleife:

aus Gl. (27.3)  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{R^2}$  mit  $d\vec{\ell} \perp \hat{r} \Rightarrow$  Magnetfeld eines Stromelements

im Mittelpunkt der Schleife  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{\ell}| \sin 90^\circ}{R^2} \vec{e}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\vec{\ell}|}{R^2} \vec{e}_x$

$\Rightarrow$  vom gesamten Strom erzeugtes Magnetfeld in x-Richtung

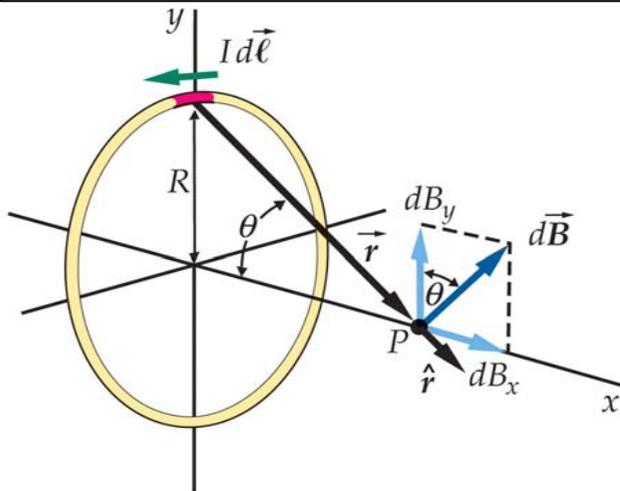
$$B = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint |d\vec{\ell}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad 27-4$$

B AT THE CENTER OF A CURRENT LOOP

Magnetfeld auf der Achse eines Leiterschleife:

aus Gl. (27.3)  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$  mit  $d\vec{\ell} \perp \hat{r} \Rightarrow$  Magnetfeld eines Stromelements auf der Achse der Schleife



$$d\vec{B} = dB_x \vec{e}_x + dB_y \vec{e}_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{(R^2 + x^2)} \sin \theta \vec{e}_x + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{(R^2 + x^2)} \cos \theta \vec{e}_y \Rightarrow$$

Bei Summation aller Stromelemente in der Schleife  $\Rightarrow$  Komponenten senkrecht zur Achse der Schleife addieren sich zu null  $\Rightarrow$

$$\text{mit } \sin \theta = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \Rightarrow dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{(R^2 + x^2)} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad 27-5$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} \quad 27-6$$

B ON THE AXIS OF A CURRENT LOOP

MAGNETIC-DIPOLE FIELD ON THE AXIS OF THE DIPOLE

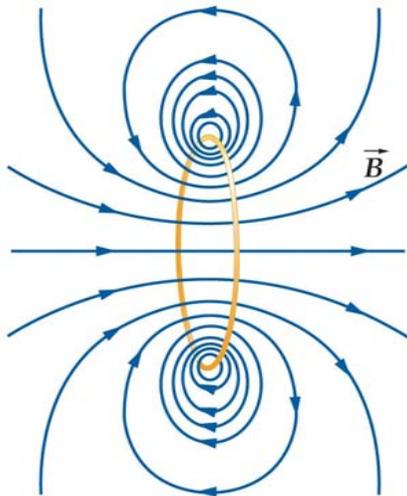
$$\text{für } |x| \gg R \Rightarrow (x^2 + R^2)^{3/2} \approx |x|^3 \Rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi IR^2}{|x|^3}$$

mit der Definition des magnetischen Moments der Schleife  $\mu = I\pi R^2 \Rightarrow$

$$\text{für } |x| \gg R \quad B_x \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3}$$

$$\text{vergleiche für ein elektrisches Dipol } B_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{|x|^3}$$

Eine Leiterschleife verhält sich wie ein magnetischer Dipol (ohne Beweis):  
 wird sie in ein äußeres Magnetfeld gebracht, dann  $\Rightarrow$  Drehmoment  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  und  
 Wirkung im großem Abstand wie ein magnetischer Dipolfeld



Beispiel 27.2: B auf der Achse einer Leiterschleife mit mehreren Windungen

Leiterschleife mit kreisförmigen Querschnitt,  $R = 5 \text{ cm}$ , und mit  $N = 12$  Windungen, liegt in der  $y$ - $z$ -Ebene ( $x=0$ ) und mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Strom  $I = 4 \text{ A}$  so gerichtet, daß das magnetische Moment  $\mu$  in Richtung der  $x$ -Achse.

Gesucht: mit Hilfe von Gl. (27.5)  $B_x$  auf der  $x$ -Achse bei a)  $x = 0$ , b)  $x = 15 \text{ cm}$ , c)  $x = 3 \text{ m}$ ; d) mit Hilfe von Gl. 27.6 für  $x = 3 \text{ m}$ .

$$\text{Mit Gl. (27.5) } B_x = N \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\text{Teil a) für } x = 0 \Rightarrow B_x = N \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} = 12 \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})}{2} \frac{(4 \text{ A})}{(0.05 \text{ m})} = 6.03 \times 10^{-4} \text{ T}$$

$$\text{Teil b) für } x = 15 \text{ cm} \Rightarrow B_x = N \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 12 \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})}{2} \frac{(4 \text{ A})(0.05 \text{ m})^2}{[(0.05 \text{ m})^2 + (0.15 \text{ m})^2]^{3/2}} = 1.91 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$\text{Teil c) für } x = 3 \text{ m} \Rightarrow B_x = N \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 12 \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})}{2} \frac{(4 \text{ A})(0.05 \text{ m})^2}{[(0.05 \text{ m})^2 + (3.0 \text{ m})^2]^{3/2}} = 2.791 \times 10^{-9} \text{ T}$$

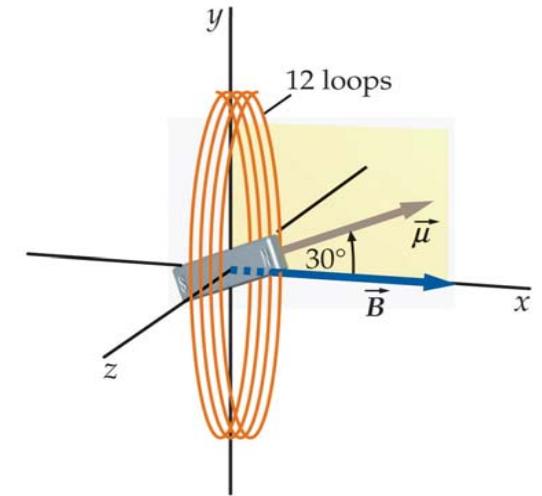
$$\text{Teil d) mit Gl. (27.5) } B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|x|^3} \text{ und } \mu = NIR^2\pi = 12(4 \text{ A})(0.05 \text{ m})^2\pi = 0.377 \text{ A m}^2 \Rightarrow$$

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})}{4\pi} \frac{2(0.377 \text{ A m}^2)}{|3 \text{ m}|^3} = 2.793 \times 10^{-9} \text{ T}$$

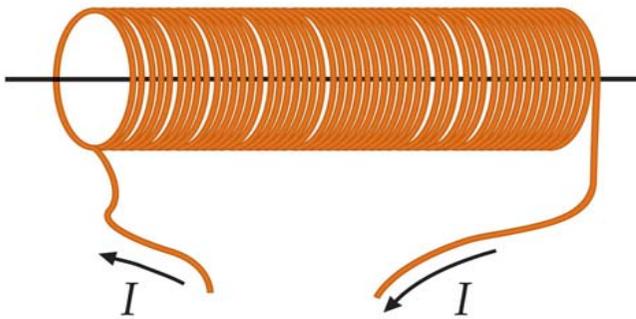
Beispiel 27.3: Die bewegte Ladungsmenge

mögliches Prüfungsbeispiel

mögliches Prüfungsbeispiel



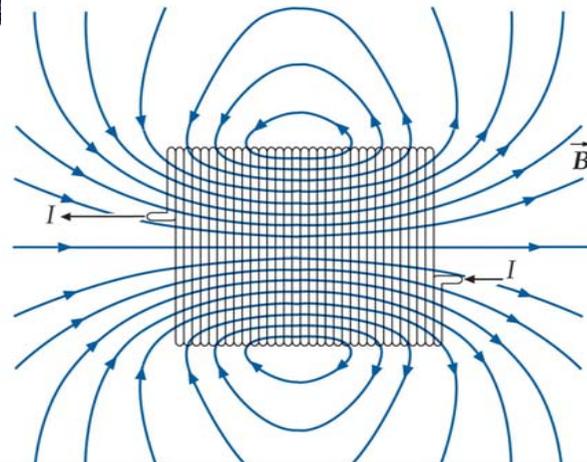
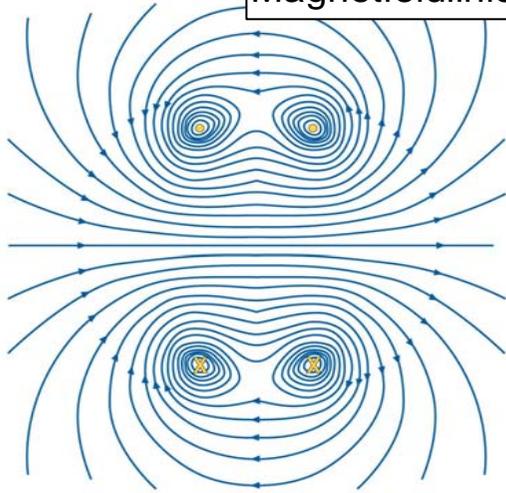
### Das Magnetfeld im Inneren einer stromdurchflossenen Spule



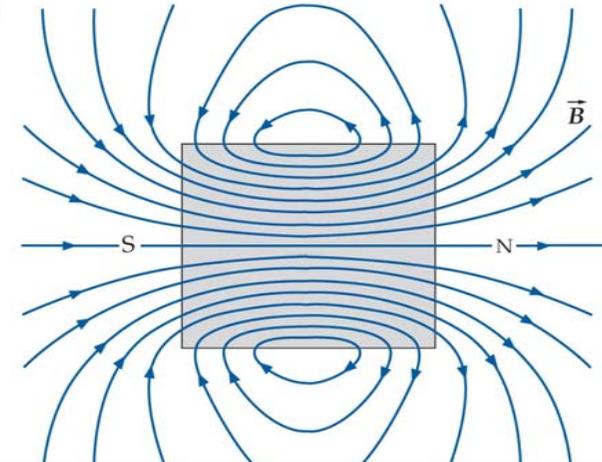
Zylinderspule = dicht gewickelte Spule  $\hat{=}$  Reihe nahe beieinander liegender Leiterschleifen, die vom gleichen Strom durchflossen werden  $\Rightarrow$  im Inneren der Spule entsteht ein homogenes Magnetfeld

Die Spule spielt in der Magnetostatik die gleiche Rolle wie der Kondensator in der Elektrostatik

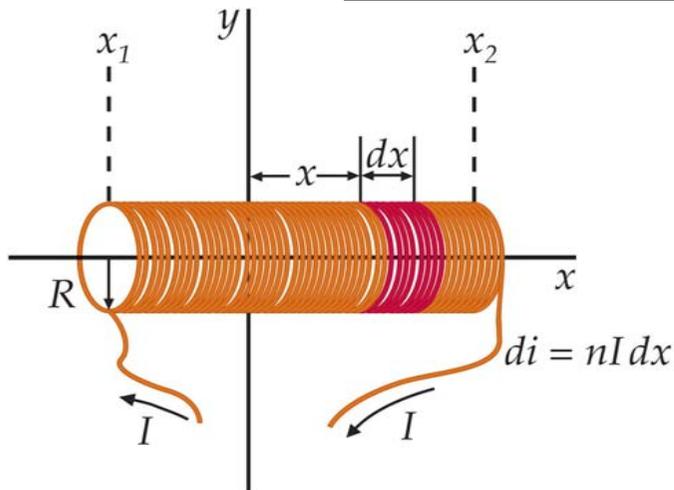
Magnetfeldlinien zweier coaxialer Leiterschleifen, die vom gleichen Strom durchflossen werden



Magnetfeldlinien einer stromdurchflossenen Spule



Magnetfeldlinien eines Stabmagneten



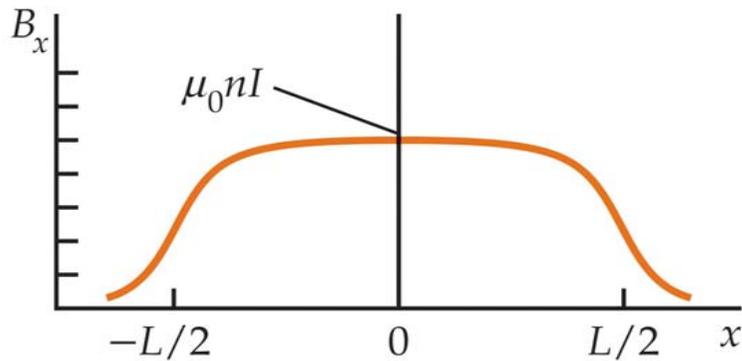
Spule der Länge  $L$  mit  $n$  Windungen, die vom Strom  $I$  durchflossen wird gesucht: Magnetfeld im Ursprung des Koordinatensystems  $\Rightarrow$   
 mit  $n = (N/L)$  Anzahl der Windungen pro Längeneinheit  $\Rightarrow$   
 im Abschnitt  $dx$  sind  $n dx$  Windungen vorhanden mit jeweils Strom  $I \Rightarrow$   
 äquivalent zu einzelner Leiterschleife mit Strom  $dI = n dx I \Rightarrow$  mit Hilfe  
 von Gl. (27.5)  $B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{nIR^2 dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{nIR^2 dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$  liefert auch das Magnetfeld im Ursprung erzeugt von einer Leiterschleife im Abstand  $x \Rightarrow$

von der gesamten Spule im Ursprung erzeugte Magnetfeld  $B_x = \frac{\mu_0}{2} nIR^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow$  aus Formelsammlung

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{R^2 (R^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right) \Rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{2} nI \left( \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right)$$

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 nI \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right) \quad 27-8$$



$B_x$  ON THE AXIS OF A SOLENOID AT  $x = 0$

Im Inneren einer langen Spule ( $L \gg R$ ) mit  $x_1 = -L/2$  und  $x_2 = +L/2$

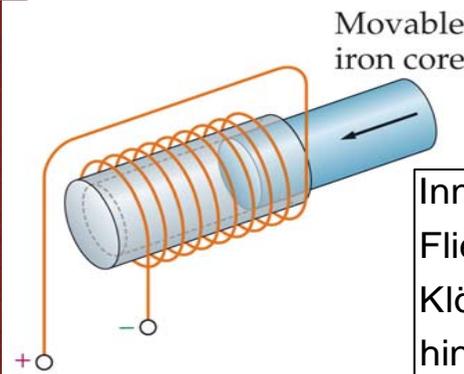
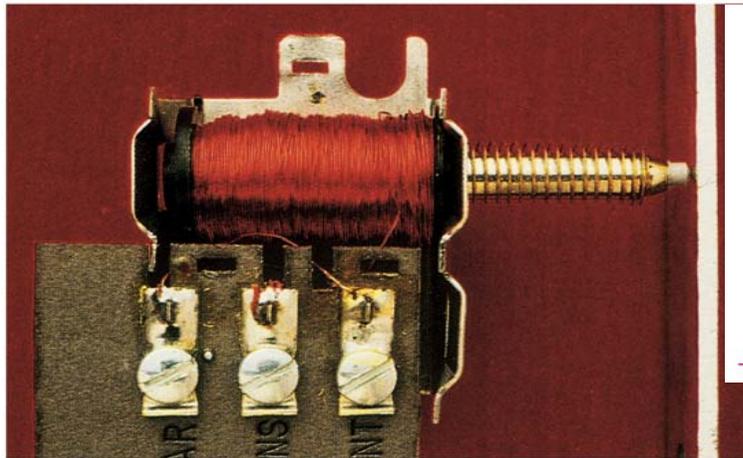
$$\Rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{2} nI \left( \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right) \approx \mu_0 nI$$

$$B_x = \mu_0 nI \quad 27-9$$

$B_x$  INSIDE A LONG SOLENOID

Sei  $x_1 = 0$  und  $x_2 = L$  wobei  $L \gg R \Rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{2} nI \left( \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right) \approx \frac{\mu_0}{2} nI \Rightarrow$

das Magnetfeld am Ende einer langen Spule ist halb so groß wie das Magnetfeld im Zentrum der Spule



Innenansicht einer Türklingel:  
 Fließt durch die Spule ein Wechselstrom  $\Rightarrow$   
 Klöppel durch das Magnetfeld periodisch  
 hin und her bewegt  $\Rightarrow$   
 periodischen Anschlag des Glockendeckels;  
 die Feder zieht den Klöppel zurück in die  
 Ausgangslage

Beispiel 27.5:  $B$  in der Mitte einer Spule

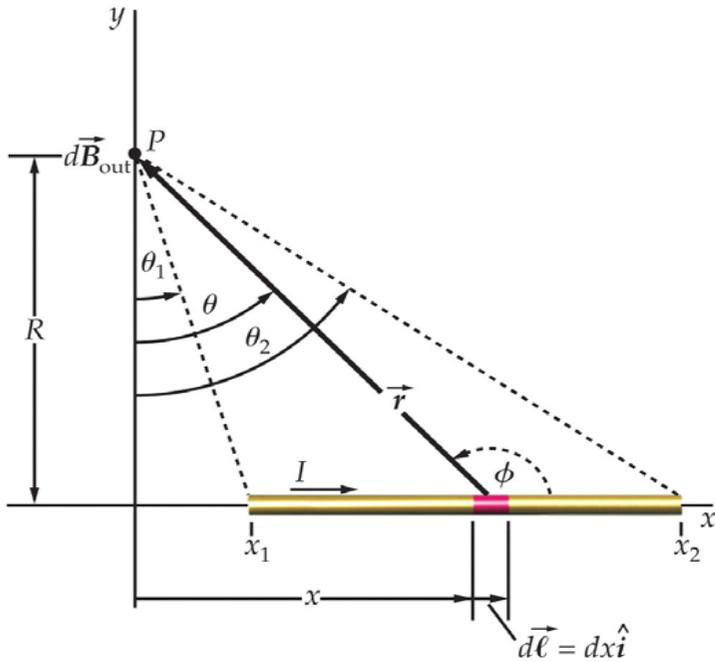
Spule,  $L = 20$  cm, Radius  $R = 1.4$  cm, Windungen  $N = 600$ , durch die ein Strom  $I = 4$  A fließt;  
 gesucht: Magnetfeld  $B$  im Mittelpunkt  $\Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (27.8)} \quad B_x = \frac{\mu_0}{2} n I \left( \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right) \quad \text{mit } x_1 = -L/2 = -10 \text{ cm und } x_2 = +L/2 = +10 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} = \frac{-10 \text{ cm}}{\sqrt{(1.4 \text{ cm})^2 + (-10 \text{ cm})^2}} = -0.990 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} = \frac{+10 \text{ cm}}{\sqrt{(1.4 \text{ cm})^2 + (+10 \text{ cm})^2}} = +0.990 \Rightarrow$$

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})}{2} \frac{600}{0.20 \text{ m}} (4 \text{ A})(+0.990 + 0.990) = 1.50 \times 10^{-2} \text{ T} = 150 \text{ G}$$

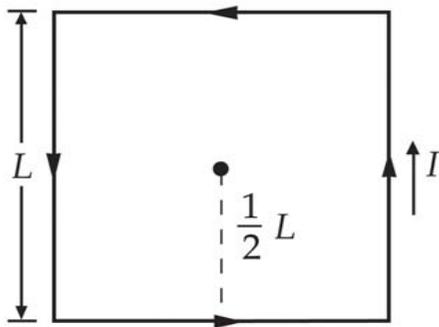
Das Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters



Aus Gl. 27.3  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$  folgt mit  $d\vec{\ell} \parallel \vec{e}_x$  und Feldpunkt P auf der y-Achse  $\Rightarrow d\vec{\ell} \times \hat{r} = dx \sin \phi \vec{e}_z \parallel \vec{e}_z \Rightarrow$  im Punkt P  $dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \phi}{r^2}$   
 mit  $\phi = 90^\circ + \theta$  bzw.  $\sin \phi = \sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \cos \theta}{r^2}$   
 mit  $x = R \tan \theta$  und  $R = r \cos \theta \Rightarrow dx = R \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = R \frac{r^2}{R^2} d\theta = \frac{r^2}{R} d\theta$   
 $\Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \theta}{r^2} \frac{r^2}{R} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \theta}{R} d\theta \Rightarrow$  Integration  
 $B_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \theta}{R} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$  bzw.  
 mit  $\theta = \phi - 90^\circ$  bzw.  $\sin \theta = \sin(\phi - 90^\circ) = \cos \phi \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\cos \phi_2 - \cos \phi_1)$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad 27-11$$

Beispiel 27.6: B im Mittelpunkt einer quadratischen Schleife



B DUE TO A STRAIGHT WIRE SEGMENT

Gesucht: Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Schleife, Seitenlänge  $\ell = 50$  cm, wobei ein Strom  $I = 1.5$  A fließt:

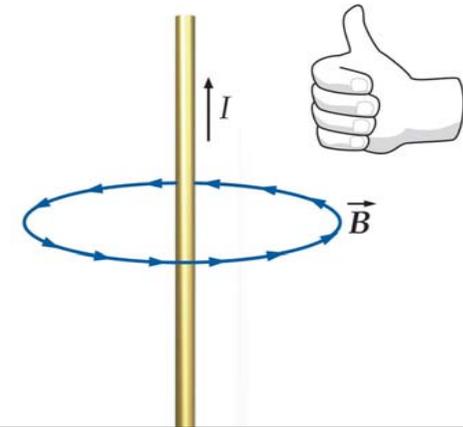
$$B = 4B_s \text{ wobei } B_s \text{ Feld erzeugt von einer einzelnen Seite} \Rightarrow B_s = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) (1.5 \text{ A})}{4\pi (0.25 \text{ m})} (\sin 45^\circ - \sin 45^\circ) = 8.49 \times 10^{-7} \text{ T} \Rightarrow B = 4B_s = 3.39 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Geht die Länge des Drahtes in beiden Richtungen gegen unendlich  $\Rightarrow \phi_1 \rightarrow 0^\circ$  und  $\phi_2 \rightarrow 180^\circ \Rightarrow$   
 mit  $\theta = \phi - 90^\circ \Rightarrow \theta_1 \rightarrow -90^\circ$  und  $\theta_2 \rightarrow +90^\circ \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin(+90^\circ) - \sin(-90^\circ)) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

27-12

$B$  DUE TO AN INFINITELY LONG, STRAIGHT WIRE



Die Magnetfeldlinien bilden Kreise um den Leiter.

Um die Richtung von  $B$  zu bestimmen, wird die Rechte-Hand-Regel angewendet

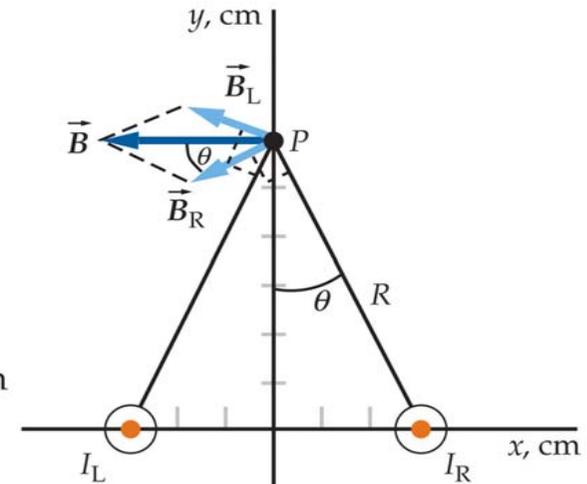
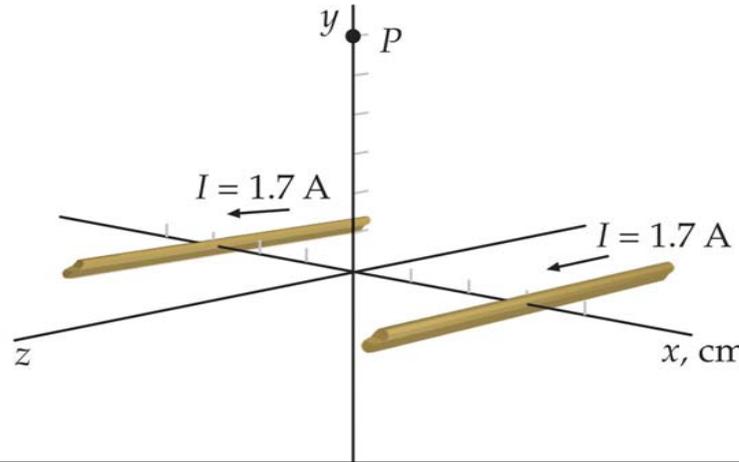


Stromzange = Prüfgerät zur berührungslosen Messung elektrischer Ströme:

Ein Hall-Generator misst das vom Strom erzeugte Magnetfeld, Gl. (27.12) und gibt eine zur Feldstärke proportionale Spannung aus, Gl. (26.20)

Beispiel 27.7: B zweier paralleler stromdurchflossener Leiter

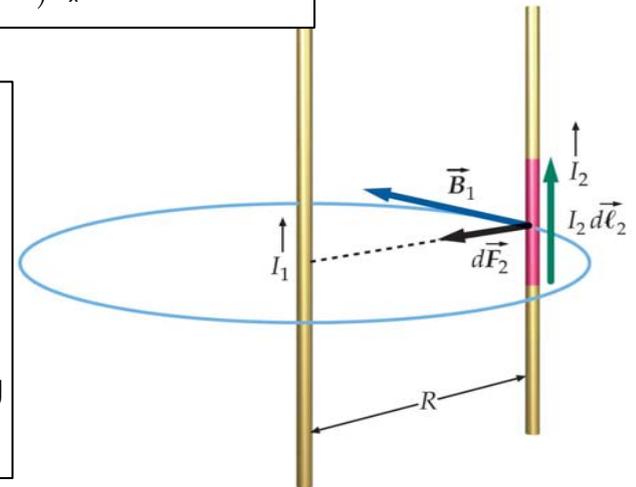
Zwei lange gerade Leiter parallel zur z-Achse, einer entlang der Linie mit  $x_1 = -3 \text{ cm}$  und  $y_1 = 0 \text{ cm}$ , der zweite entlang der Linie mit  $x_2 = +3 \text{ cm}$  und  $y_2 = 0 \text{ cm}$ . Durch beide Leiter in positiver z-Richtung  $I = 1.7 \text{ A}$ .  
 Gesucht:  $B$  auf der y-Achse bei  $y = 6 \text{ cm} \Rightarrow$



aus  $\vec{B} = \vec{B}_L + \vec{B}_R = -B_L \cos(-\theta) \vec{e}_x + B_L \sin(-\theta) \vec{e}_y - B_R \cos(\theta) \vec{e}_x + B_R \sin(\theta) \vec{e}_y \Rightarrow$  mit  $|\vec{B}_L| = |\vec{B}_R| = B_L = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R}$   
 und  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$  und  $\cos(-\theta) = \cos\theta \Rightarrow \vec{B} = -2B_L \cos\theta \vec{e}_x \Rightarrow$  mit  $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2} = 6.71 \text{ cm}$   
 $\Rightarrow B_L = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R} = B_L = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) 2(1.7 \text{ A})}{4\pi (0.00671 \text{ m})} = 5.07 \times 10^{-6} \text{ T} = 5.07 \times 10^{-2} \text{ G} \Rightarrow$   
 mit  $\cos\theta = \frac{y}{R} = \frac{6 \text{ cm}}{6.71 \text{ cm}} = 0.894 \Rightarrow \vec{B} = -2B_L \cos\theta \vec{e}_x = -2(5.07 \times 10^{-6} \text{ T})(0.894) \vec{e}_x = (-9.07 \times 10^{-6} \text{ T}) \vec{e}_x$

Die Kraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern

Gl. (27.12)  $B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R}$  gibt das von einem langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter erzeugte Magnetfeld an, Gl. (26.5)  $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$  liefert die von einem Magnetfeld auf einem Abschnitt eines stromdurchflossenen Leiters ausgeübte Kraft  $\Rightarrow$  die auf das Stromelement  $I_2 d\vec{\ell}_2$  wirkende Kraft durch die Anwesenheit des Magnetfeldes  $\vec{B}_1$ ,  $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1$ , zeigt in Richtung des ersten Leiters. Analog für das Stromelement  $I_1 d\vec{\ell}_1 \Rightarrow$  die Kraft zeigt in Richtung des zweiten Leiters.



⇒ parallel fließende Ströme ziehen sich an, antiparallelen fließende Ströme stoßen sich ab

aus  $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 \Rightarrow |d\vec{F}_2| = dF_2 = I_2 |d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1| = I_2 d\ell_2 B_1$  da  $\vec{B}_1 \perp d\vec{\ell}_2 \Rightarrow$  ist der Abstand  $R$  der Drähte klein

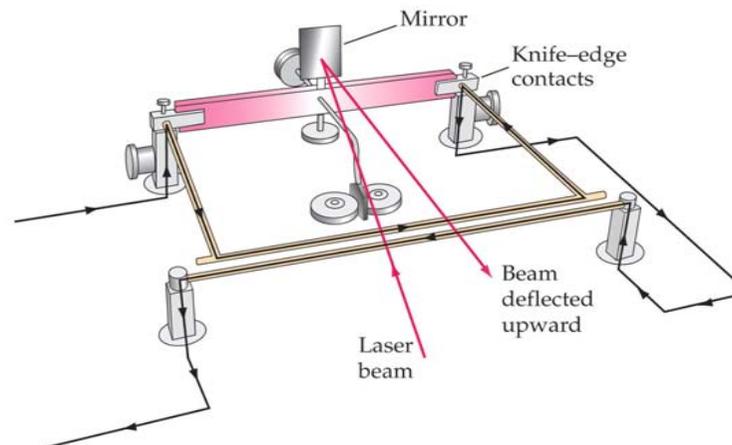
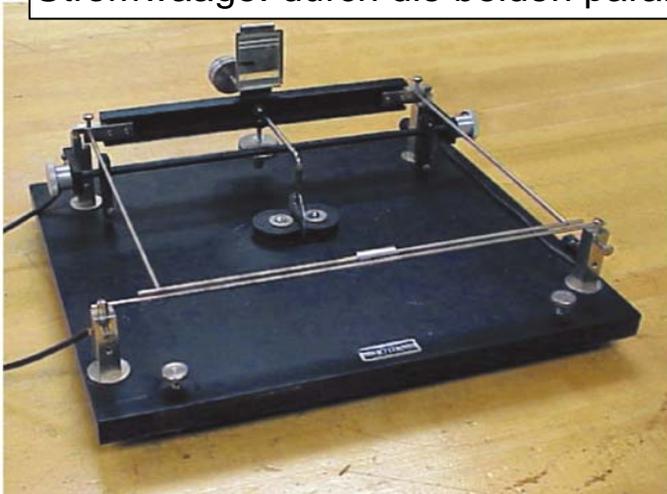
im Vergleich zu ihrer Länge  $\Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R} \Rightarrow dF_2 = I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R} \Rightarrow$

Kraft pro Längeneinheit  $\frac{dF_2}{d\ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$

The ampere is the constant electric current that, when maintained in two straight parallel conductors of infinite length and of negligible circular cross sections placed one meter apart in a vacuum, would produce a force between the conductors equal to  $2 \times 10^{-7}$  newtons per meter of length.

#### DEFINITION — AMPERE

Stromwaage: durch die beiden parallelen Stäbe fließe gleich starke, antiparallele Ströme



Beispiel 27.8: Messung mit einer Stromwaage

mögliches Prüfungsbeispiel

27.3 Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder (Gauss's law for magnetism)

Während die Feldlinien von  $\vec{B}$  geschlossene Schleifen bilden, beginnen und enden die Linien von  $\vec{E}$  an elektrischen Ladungen.

Wird ein Ende eines Stabmagneten von einer Gauß'schen Oberflächen umschlossen, so ist die Anzahl der Magnetfeldlinien, die durch die Fläche austreten, gleich der Anzahl der Feldlinien, die in die Fläche eintreten

⇒ der magnetische Fluß durch eine beliebige geschlossene Fläche  $\vec{A}$  ist stets null:

$$\phi_{m, net} = \oint_S B_n dA = 0$$

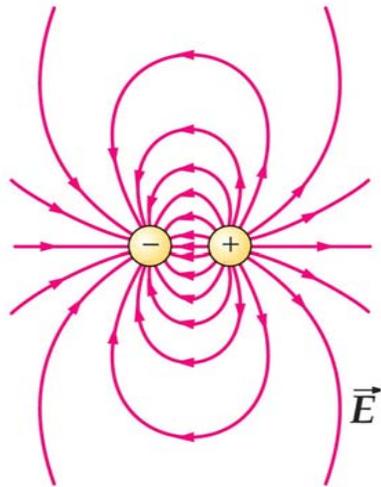
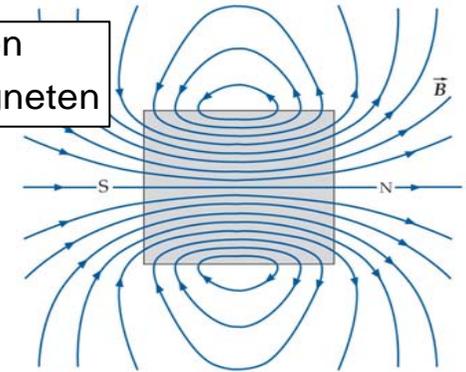
27-14

GAUSS'S LAW FOR MAGNETISM

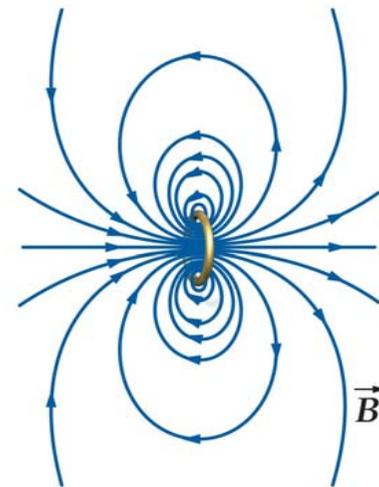
Es gibt keine Punkte im Raum, von denen Magnetfeldlinien ausgehen oder in denen sie zusammenlaufen

⇒ magnetische Monopole gibt es nicht (bzw. sie wurden bisher nicht gefunden) ⇒ als fundamentale Einheit des Magnetismus gilt das magnetische Dipol

Magnetfeldlinien eines Stabmagneten



Vergleich elektrischer Dipol (links) und magnetischer Dipol (rechts): in großer Entfernung von den Dipolen ist der Muster identisch

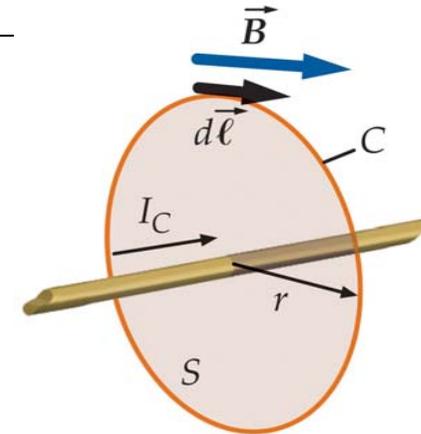


27.4 Das Ampère'sche Gesetz (Ampère's law)

Das Ampère'sche Gesetz verknüpft die tangentielle Komponente  $B_t$  des Magnetfeldes, summiert (integriert) entlang einer geschlossenen Kurve C, mit dem durch eine beliebige, von C begrenzte Fläche S tretenden Strom  $I_C$  :

$$\oint_C B_t d\ell = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C, \quad C \text{ is any closed curve} \quad 27-15$$

AMPÈRE'S LAW



Mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes kann man das Magnetfeld in Anordnungen mit hoher Symmetrie ermitteln.

Das Ampère'sche Gesetz gilt für jede beliebige Kurve C unter der Voraussetzung stationärer und kontinuierlicher Ströme.

Einfache Anwendung des Ampère'schen Gesetz:

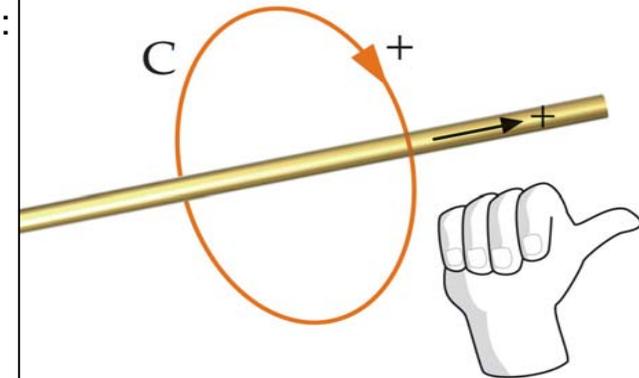
Magnetfeld eines unendlich langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters:

Wegen des Biot-Savart'sches Gesetzes Gl. (27.3)  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{R^2} \Rightarrow$

auf einem Kreis um den Leiter ist das Magnetfeld konstant und verläuft tangential zum Kreis  $\Rightarrow$  aus Gl. (27.15)  $\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I_C \Rightarrow B \int_C d\ell = \mu_0 I_C$

$\Rightarrow$  mit  $I_C = I$  Strom durch den Leiter  $\Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Leftrightarrow \quad \text{siehe Gl. (27.12)}$$



Beispiel 27.9:  $B$  innerhalb und außerhalb eines Drahtes

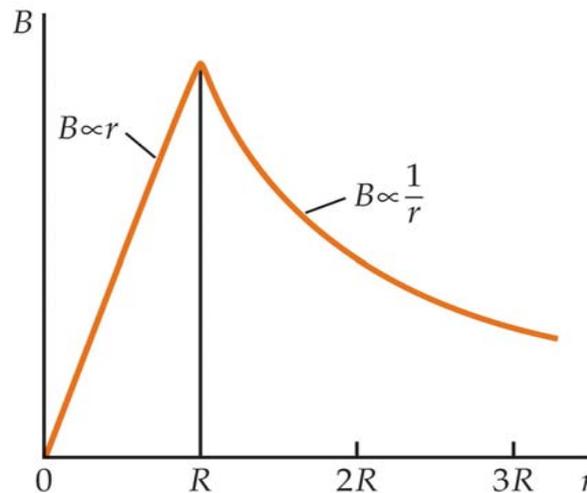
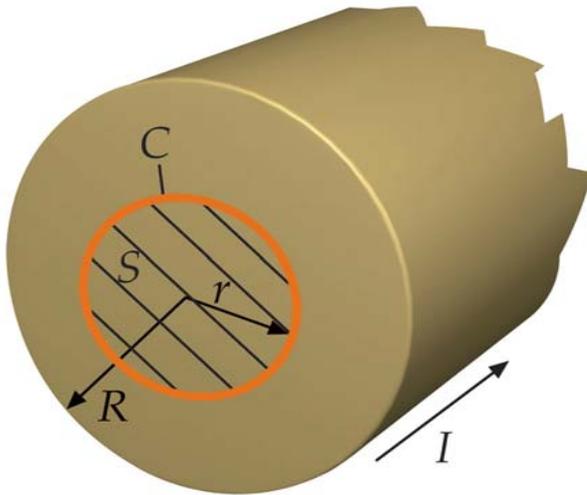
Langer, gerader Draht mit Radius  $R$ , durchflossen vom Strom  $I$ , wobei Stromdichte über den kreisförmigen Querschnitt konstant  $\Rightarrow$  gesucht: Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters

mit Gl. (27.15)  $\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I_C \Rightarrow$  Kurve  $C$  sei gegeben durch Kreis mit Radius  $r$ , mit Symmetrieachse

auf der Achse des Drahtes  $\Rightarrow \oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I_C = B \oint_C d\ell = B 2\pi r = \mu_0 I_C \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r}$

außerhalb des Drahtes ist  $r > R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sim \frac{1}{r}$

innerhalb des Drahtes ist ( $r < R$ ) mit  $\frac{I_C}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2} \Rightarrow I_C = I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R^2} r \sim r$



Berechnung des Magnetfeldes einer dicht gewickelten Toroid- oder Ringspule = Drahtschleifen (jede mit dem Strom  $I$ ), die um eine zum Ring geschlossene Röhre gewickelt wird.

Mit der Kurve  $C$  entlang eines Kreises mit Radius  $r$  und Mittelpunkt im Zentrum der Ringröhre  $\Rightarrow$

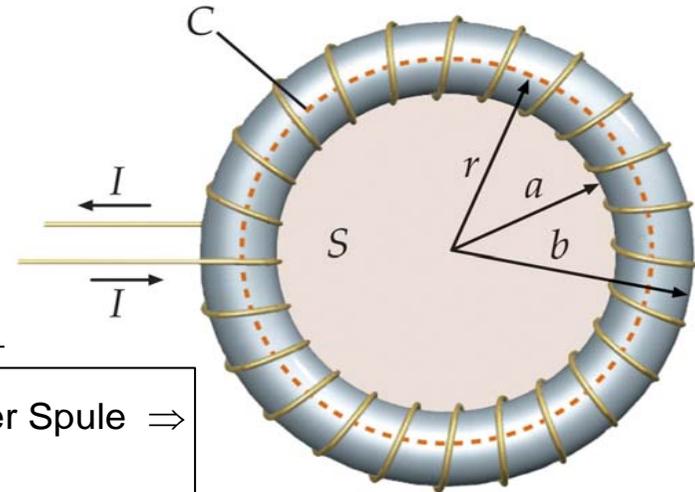
$$\oint_C \vec{B} d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 I_C \quad \text{wobei } I_C = nI \text{ Gesamtstrom durch die von einem Kreis mit dem Radius } r \text{ umschlossene}$$

Fläche  $S$  und  $a < r < b$  (jede Windung tritt einmal durch die Fläche  $S$ )

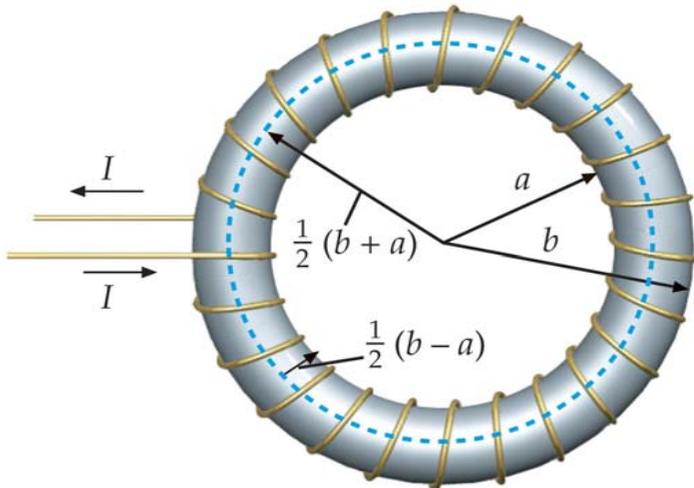
$$\Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 nI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 nI}{2\pi r}$$

für  $r < a$  bzw.  $r > b$  ist  $I_C = 0$  und somit  $B = 0$ ;

$$\text{für } a < r < b \text{ ist } B = \frac{\mu_0 nI}{2\pi r} \sim \frac{1}{r}$$

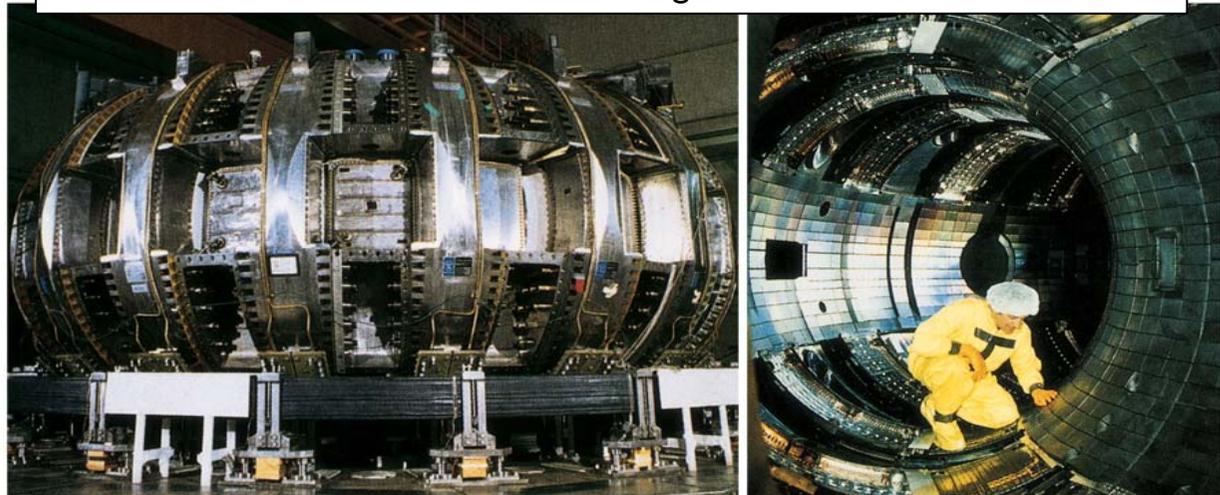


falls Radius  $\frac{1}{2}(b-a)$  der einzelnen Windungen  $\ll$  Radius  $\frac{1}{2}(b+a)$  der Spule  $\Rightarrow$   
 $B$  annähernd homogen wie in der Zylinderspule



<http://www.iter.org/>

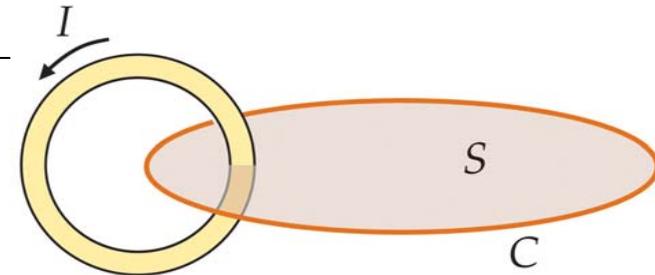
Tokamak-Reaktor als Versuchsanlage für die kontrollierte Fusion



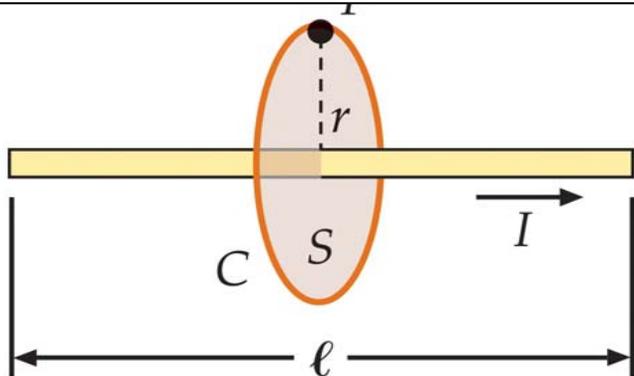
**Grenzen der Gültigkeit des Ampère'schen Gesetzes**

Ein Magnetfeld mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes zu berechnen ist nur sinnvoll, wenn die Anordnung hohe Symmetrie aufweist und wenn der Strom im Raum stetig ist.

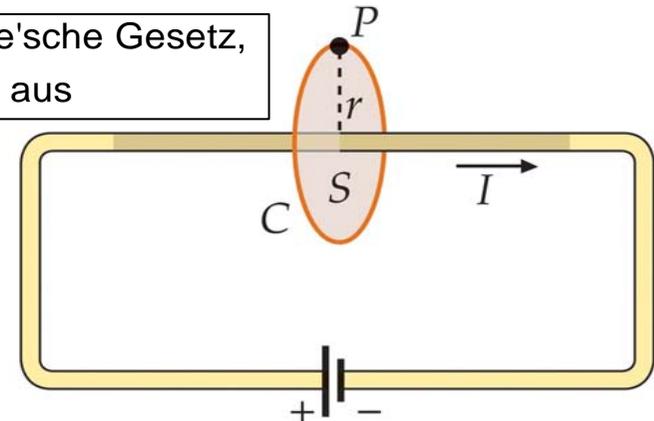
Das Ampère'sche Gesetz gilt für die eingezeichnete Kurve C, die den Strom in der Leiterschleife umschließt, aber  $B_{\perp}$  lässt sich nicht als konstanter Faktor vor das Integral ziehen



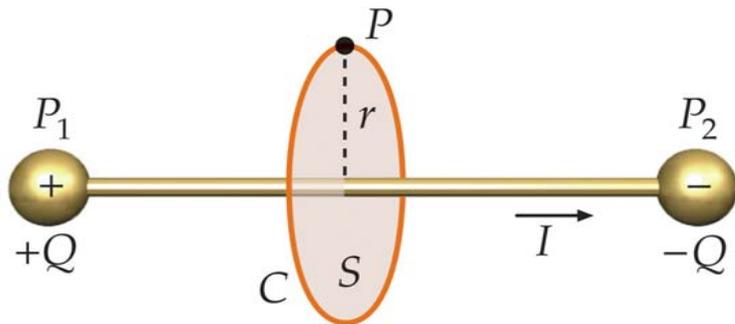
Die Anwendung des Ampère'schen Gesetzes zur Berechnung von B liefert ein Ergebnis in Widerspruch zum Biot-Savart-Gesetz



Für die Kurve C gilt das Ampère'sche Gesetz, die Symmetrie reicht aber nicht aus



Ein kurzzeitiger Strom fließt durch den Leiterabschnitt. Die Symmetrie würde aus zur Anwendung des Ampère'schen Gesetzes ausreichen, aber der Strom ist im Raum nicht stetig

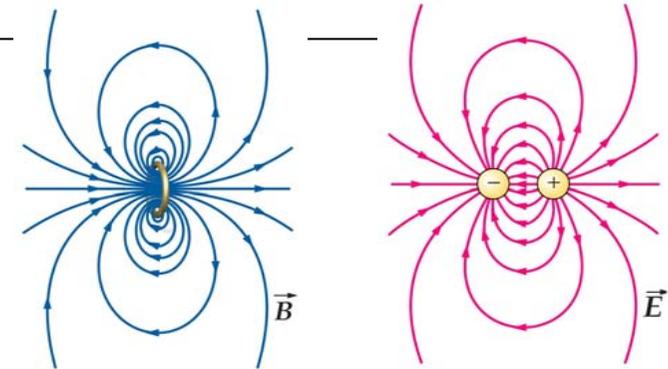


**27.5 Magnetismus in Materie (Magnetism in matter)**

Jedes Atom besitzt ein magnetisches Dipolmoment aufgrund der Bewegung seiner Elektronen (inklusive Spin der Elektronen). Die magnetischen Dipole richten sich parallel zu einem äußeren Feld und verstärken dieses, im Gegensatz zu den elektrischen Dipolen.

In magnetisch polarisierten Materialien werden Magnetfelder erzeugt, die zum Vektor des magnetischen Dipolmoments parallel sind.

Nach dem Verhalten ihrer magnetischen Momente in einem äußeren Magnetfeld lassen sich Materialien in eine von drei Kategorien einordnen: paramagnetische Stoffe, diamagnetische Stoffe, und ferromagnetische Stoffe.



Paramagnetisches Verhalten  $\Leftrightarrow$  Ausrichtung der Elektronenspins (in Metallen) oder der magnetischen Momente von Atomen oder Molekülen bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes  $\Rightarrow$  die magnetischen Dipole werden teilweise in Feldrichtung orientiert  $\Rightarrow$  Verstärkung des Magnetfeldes.

Ferromagnetisches Verhalten  $\Leftrightarrow$  Starke Wechselwirkung zwischen den magnetischen Dipolen  $\Rightarrow$  bereits beim Anlegen eines schwachen äußeren Magnetfeldes führt zur Ausrichtung sehr vieler Dipole (beim Permanentmagnet auch ohne Anwesenheit eines äußeren Feldes)  $\Rightarrow$  starke Verstärkung des Magnetfeldes.

Diamagnetisches Verhalten  $\Leftrightarrow$  bei Anlegen eines äußeren Magnetfeldes werden magnetische Dipole induziert, die antiparallel zum äußeren Magnetfeld gerichtet sind und das Magnetfeld schwächen.

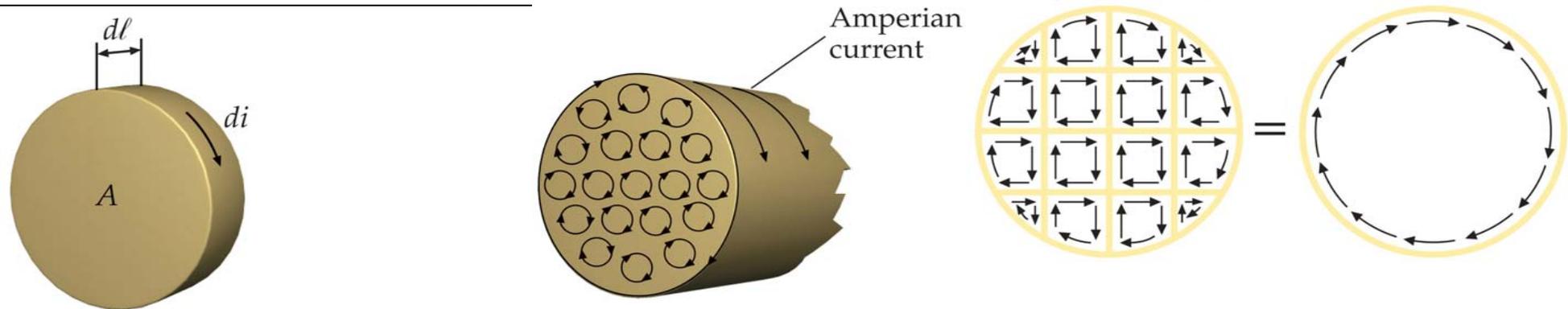
Diamagnetismus tritt immer auf, wird aber häufig durch Paramagnetismus und Ferromagnetismus überdeckt.

**Magnetismus und magnetische Suszeptibilität**

Bringt man einen Stoff in ein starkes Magnetfeld  $\Rightarrow$  die (induzierten oder permanenten) magnetischen Momente werden in Inneren des Materials ausgerichtet  $\Rightarrow$  das Material wird magnetisiert:

Magnetisierung  $\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV}$  resultierendes magnetisches Moment pro Volumseinheit

Modell atomarer Kreisströme  $\hat{=}$  klassisches Modell für die Bahnbewegung und die Spins der Elektronen; Zylinder aus magnetisierbarem Material wobei die magnetischen Momente parallel zur Zylinderachse ausgerichtet sind  $\Rightarrow$  benachbarte Kreisströme heben sich gegenseitig auf  $\Rightarrow$  Gesamtstrom in Inneren des Zylinders überall null  $\Rightarrow$  an der Oberfläche fließt der Ampère'sche Strom  $\hat{=}$  Strom in den Windungen einer Zylinderspule



Scheibenmodell zur Erklärung der Beziehung zwischen Magnetisierung  $M$  und Ampère'schem Strom pro Längeneinheit

Ampère'scher Strom an der Oberfläche der Scheibe  $dI \Rightarrow$  magnetisches Dipolmoment der Scheibe  $d\vec{\mu} = \vec{A}dI \Rightarrow$

Magnetisierung  $\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} = \frac{\vec{A}dI}{Adl} = \frac{dI}{dl}\vec{n}$  wobei  $\vec{n} = \frac{\vec{A}}{A} \Rightarrow$  SI-Einheit von  $M$ :  $A\ m^{-1}$

Zylinder mit homogener Magnetisierung  $\vec{M}$  parallel zur Achse  $\Rightarrow$  vergleichbar mit langer Zylinderspule  $\Rightarrow$

Magnetfeld im Inneren der Zylinderspule, weit weg von dessen Enden,  $B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$

$\Rightarrow$  Magnetfeld  $B_{\text{mag}}$  im Inneren des magnetisierten Zylinders, weit weg von dessen Enden,  $\vec{B}_{\text{mag}} = \mu_0 \vec{M} \Rightarrow$  Gesamtmagnetfeld  $\vec{B}$  im Inneren einer Spule ( $\vec{B}_{\text{aus}}$ ) aufgrund der Magnetisierung  $\vec{M}$  des Zylinders:  $\vec{B} = \vec{B}_{\text{aus}} + \mu_0 \vec{M}$ ; für paramagnetische und ferromagnetische Materialien sind  $\vec{M}$  und  $\vec{B}_{\text{aus}}$  gleich gerichtet, für diamagnetische Materialien entgegengesetzt gerichtet.

Für paramagnetische und diamagnetische Materialien ist  $\vec{M} \sim \vec{B}_{\text{aus}} \Rightarrow \vec{M} = \chi_{\text{mag}} \frac{\vec{B}_{\text{aus}}}{\mu_0}$  wobei  $\chi_{\text{mag}}$  magnetische

Suszeptibilität, dimensionslos  $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_{\text{aus}} + \mu_0 \vec{M} = (1 + \chi_{\text{mag}}) \vec{B}_{\text{aus}} = \mu_{\text{rel}} \vec{B}_{\text{aus}}$

wobei  $\mu_{\text{rel}} = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{B}_{\text{aus}}|} = 1 + \chi_{\text{mag}}$  relative Permeabilität des Materials,

für paramagnetische Stoffe  $\chi_{\text{mag}} > 0$  und  $\mu_{\text{rel}} \approx 1$ , temperaturabhängig,

für diamagnetische Stoffe  $\chi_{\text{mag}} < 0$  und  $\mu_{\text{rel}} \approx 1$ , temperaturunabhängig,

für ferromagnetische Stoffe  $\mu_{\text{rel}} \gg 1$ , für Permanentmagnete  $\mu_{\text{rel}}$  nicht definiert

TABLE 27-1

Magnetic Susceptibility of Various Materials at 20°C

Material	$\chi_m$
Aluminum	$2.3 \times 10^{-5}$
Bismuth	$-1.66 \times 10^{-5}$
Copper	$-0.98 \times 10^{-5}$
Diamond	$-2.2 \times 10^{-5}$
Gold	$-3.6 \times 10^{-5}$
Magnesium	$1.2 \times 10^{-5}$
Mercury	$-3.2 \times 10^{-5}$
Silver	$-2.6 \times 10^{-5}$
Sodium	$-0.24 \times 10^{-5}$
Titanium	$7.06 \times 10^{-5}$
Tungsten	$6.8 \times 10^{-5}$
Hydrogen (1 atm)	$-9.9 \times 10^{-9}$
Carbon dioxide (1 atm)	$-2.3 \times 10^{-9}$
Nitrogen (1 atm)	$-5.0 \times 10^{-9}$
Oxygen (1 atm)	$2090 \times 10^{-9}$

**Magnetische Momente von Atomen**

Die Magnetisierung eines para- oder ferromagnetischen Stoffes lässt sich auf die permanenten magnetischen Momente der einzelnen Atome oder Elektronen des Materials zurückführen.

Halbklassische Betrachtungsweise für ein Teilchen mit Masse  $m$  und Ladung  $q$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$ :

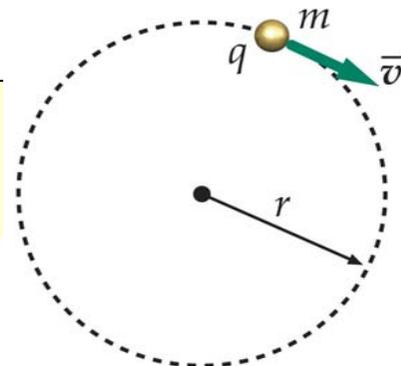
Bahndrehimpuls  $L = mvr$ , magnetisches Moment  $\mu = IA = I\pi r^2$ ,

mit Strom  $I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r} \Rightarrow \mu = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr \Rightarrow$  mit  $vr = \frac{L}{m}$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} q \frac{L}{m} \Rightarrow \vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

27-27



CLASSICAL RELATION BETWEEN MAGNETIC MOMENT AND ANGULAR MOMENTUM

In der Quantentheorie ist der Bahndrehimpuls gequantelt (siehe Kap. 10.4 und 36.3:  $|\vec{L}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$  wobei  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  bzw. entlang einer Raumrichtung  $L_z = \pm m\hbar$  wobei  $m = 0$  bis  $\ell$ )  $\Rightarrow$

das magnetische Moment des Atoms ist gequantelt  $\Rightarrow \vec{\mu}_L = \frac{q}{2m} \vec{L} = \frac{q\hbar}{2m} \frac{\vec{L}}{\hbar}$

Für ein Elektron  $m = m_e$  und  $q = -e$   $\Rightarrow \vec{\mu}_L = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{L}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}$  wobei  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  Bohr'sches Magneton

$$\vec{\mu}_e = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{L}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad 27-28$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2 = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

$$= 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T} \quad 27-29$$

MAGNETIC MOMENT DUE TO THE ORBITAL  
MOTION OF AN ELECTRON

BOHR MAGNETON

für das Elektronenspin

$$\vec{\mu}_s = -2 \times \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{S}}{\hbar} = -2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad 27-30$$

MAGNETIC MOMENT DUE TO ELECTRON SPIN

Sind in einem Material mit Volumen  $V$  die magnetischen Momente  $\mu$  aller  $N$  Atome oder Moleküle ausgerichtet  $\Rightarrow$

Sättigungsmagnetisierung  $M_s = \frac{N}{V} \mu$  wobei  $\frac{N}{V} = \frac{N_A [\text{Atome mol}^{-1}]}{M [\text{kg mol}^{-1}]} \rho [\text{kg m}^{-3}]$

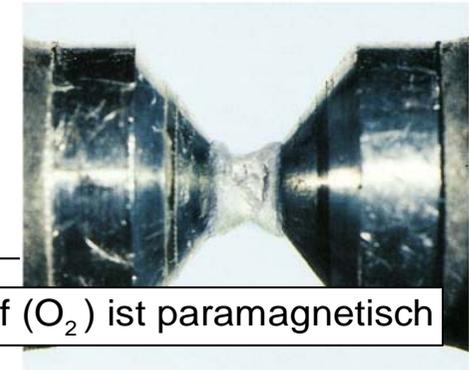
Beispiel 27.10: Die Sättigungsmagnetisierung von Eisen

Gesucht: Sättigungsmagnetisierung von Eisen, wobei Annahme  $\mu_{\text{Fe}} = \mu_{\text{B}} \Rightarrow$  Eisen Fe, Dichte  $\rho_{\text{Fe}} = 7.9 \text{ kg m}^{-3}$ ,  
 Molmasse  $M_{\text{Fe}} = 55.8 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \Rightarrow$  Sättigungsmagnetisierung  $M_s = \frac{N}{V} \mu_{\text{Fe}} = \frac{N_A}{M_{\text{Fe}}} \rho_{\text{Fe}} \mu_{\text{B}}$   

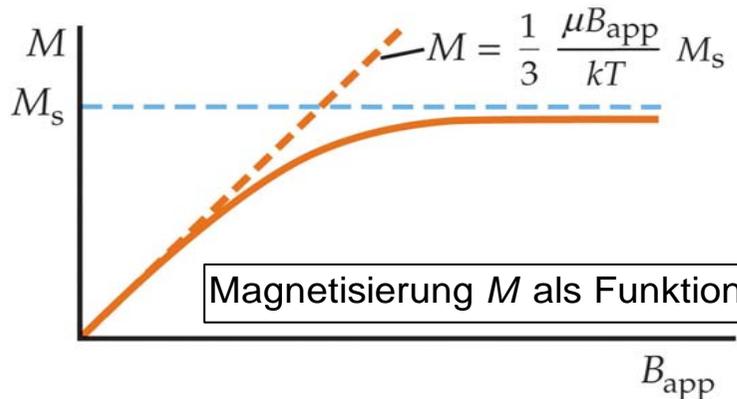
$$M_s = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ Atome mol}^{-1})}{(55.8 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1})} (7.9 \text{ kg m}^{-3}) (9.27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2) = 7.90 \times 10^5 \text{ A m}^{-1} \Rightarrow$$
  
 von dieser Magnetisierung erzeugte Magnetfeld  $B = \mu_0 M_s = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) (7.90 \times 10^5 \text{ A m}^{-1}) = 0.993 \text{ T}$

**Paramagnetismus**

Die permanenten magnetischen Momente der Atome paramagnetischer Stoffe wechselwirken nur schwach miteinander  $\Leftrightarrow$  paramagnetische Stoffe besitzen eine sehr kleine, positive magnetische Suszeptibilität  $\chi_{\text{mag}}$ , die temperaturabhängig ist. Die Energie  $E_{\text{pot}}$  eines magnetischen Momentes in einem Magnetfeld  $B$  ist typischerweise viel kleiner als die thermische Energie  $\sim k_B T$  eines Atoms des Stoffs:  
 aus  $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta \Rightarrow \Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(\theta = 0^\circ) - E_{\text{pot}}(\theta = 180^\circ) = 2\mu_B B =$   
 $= 2(5.79 \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1})(1 \text{ T}) = 1.16 \times 10^{-4} \text{ eV},$   
 zum Vergleich  $k_B T = (8.62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1})(300 \text{ K}) = 2.59 \times 10^{-2} \text{ eV} \gg \Delta E_{\text{pot}}$



Flüssiger Sauerstoff (O<sub>2</sub>) ist paramagnetisch



$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{app}}}{kT} M_s$$

Magnetisierung  $M$  als Funktion des angelegten Magnetfeldes  $B_{\text{aus}}$

CURIE'S LAW

## Beispiel 27.11: Anwendung des Curie'schen Gesetzes

Material mit  $\mu = \mu_B$  in Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes  $B_{\text{aus}} = 1 \text{ T}$ . Gesucht: Temperatur wo die Magnetisierung  $M$  1 % des Sättigungswertes  $M_s$  erreicht  $\Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (27.33)} \quad M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{aus}}}{k_B T} M_s \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{3} \frac{\mu_B B_{\text{aus}}}{k_B} \frac{M_s}{M} = \frac{1}{3} \frac{(5.79 \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1})(1 \text{ T})}{(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1})} \frac{1}{0.01} = 22.4 \text{ K}$$

## Ferromagnetismus

Zu den ferromagnetischen Stoffen gehören reines Eisen, Cobalt, Nickel, Legierungen dieser Metalle, und Gadolinium, Dysprosium, und einige ihrer Verbindungen.

Ursache für ferromagnetisches Verhalten: starke Wechselwirkungen (Austauschwechselwirkung) zwischen den Elektronen in einem teilweise gefüllten Band eines Metalls oder zwischen lokalisierten Elektronen an benachbarten Atomen oder Molekülen, die magnetische Momente besitzen. Die Energie von Elektronenpaaren mit parallelen Spins wird herabgesetzt im Vergleich zu Elektronenpaaren mit antiparallelen Spins.

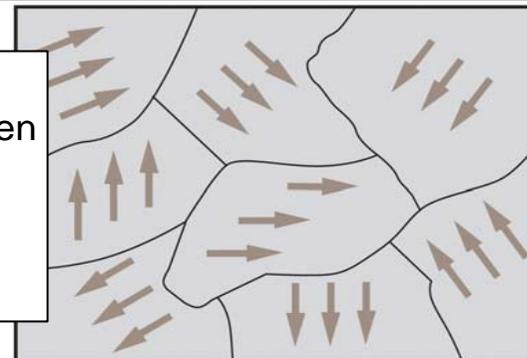


Eine Nickel-Münze wird von einem Magneten angezogen

Bei ferromagnetischen Materialien ist die magnetische Suszeptibilität  $\chi_{\text{mag}}$  sehr groß  $\Rightarrow$  bereits bei schwachen Magnetfeldern  $B_{\text{aus}}$  starke Ausrichtung der magnetische Dipole  $\mu$ . In manchen Fällen bleibt die Magnetisierung beim Ausschalten von  $B_{\text{aus}}$  erhalten.



Da die Wechselwirkung benachbarter Dipole sehr stark  $\Rightarrow$  auch ohne äußeres Feld richten sich die magnetischen Momente  $\mu$  in mikroskopisch kleinen Raumbereichen aneinander aus:  
magnetische Domänen oder Weiß'sche Bezirke.





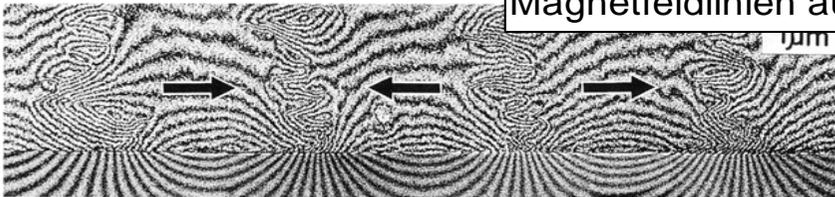
Innerhalb eines Weiß'schen Bezirk sind alle magnetischen Momente ausgerichtet, die Ausrichtung ist allerdings von Bezirk zu Bezirk verschieden  $\Rightarrow$  somit normalerweise resultierendes magnetisches Moment einer makroskopischen Probe gleich null. Übersteigt die Temperatur einen kritischen Wert, Curie-Temperatur  $\Rightarrow$  die Orientierung der magnetischen Momente wird aufgehoben  $\Rightarrow$  das Material wird paramagnetisch.

Magnetische Domänen an der Oberfläche eines 3% Si enthaltenden Eisenkristalls

Bei Anliegen eines äußeren Magnetfeldes  $\Rightarrow$  Grenzen der Weiß'schen Bezirke verschieben sich, oder die Orientierungsrichtung in einzelnen Bezirken ändert sich ("umklappen")  $\Rightarrow$  das resultierende magnetische Moment der makroskopischen Probe wird verschieden von null und ist parallel zu äußeren Magnetfeld gerichtet  $\Rightarrow$  bereits schwache Magnetfelder führen zur hochgradigen Ausrichtung  $\Rightarrow$  das von den Dipolen des Materials erzeugte Magnetfeld ist häufig wesentlich stärker als das anliegende Feld.

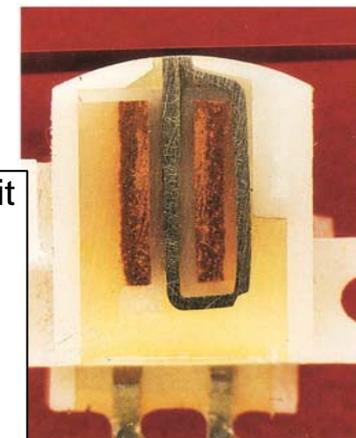
Eisenstab in Zylinderspule bei zunehmenden Strom magnetisiert:  $B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M = \mu_0 \frac{N}{L} I + \mu_0 M$

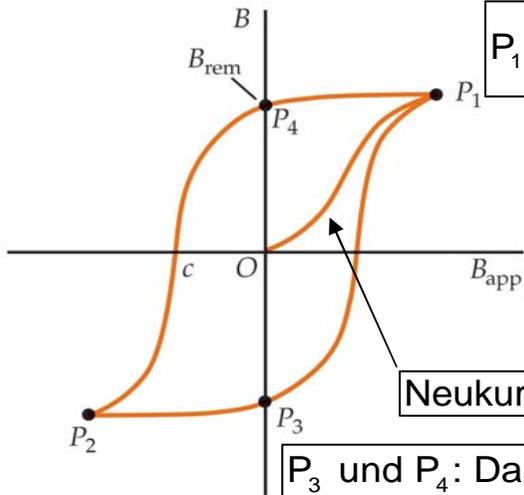
Magnetfeldlinien auf einem Tonband (Cobaltmagnetband)



Schreib- und Lesekopf eines Tonbandgerätes, bestehend aus magnetischer Kern mit Wicklung  $\Rightarrow$  bei der Aufnahme fließt ein Strom  $\Rightarrow$  an der Spitze des Tonkopfs wird ein Magnetfeld erzeugt  $\Rightarrow$  das Tonband wird magnetisiert.

Beim Abspielen (ohne Eingangssignal)  $\Rightarrow$  Bandmagnetisierung erzeugt Spannungsschwankungen (siehe Teil 28)  $\Rightarrow$  Signal





$P_1$  und  $P_2$ : Sättigungsmagnetisierung  $M_s$  erreicht  $\Rightarrow B \sim B_{aus} = \mu_0 \frac{N}{L} I$  da  $M_s = \text{konstant}$

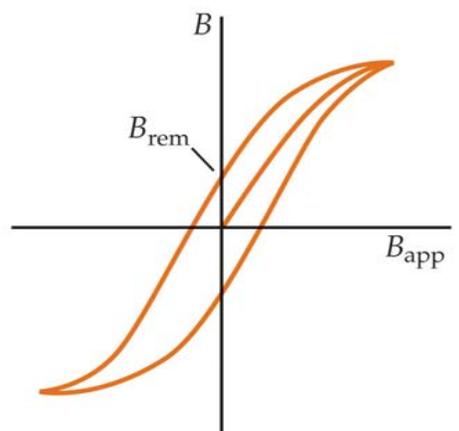
Magnetfeld  $B$  eines Eisenstabs als Funktion des äußeren Magnetfeldes  $B_{aus} = B_{app}$ .

$$B = B_{aus} + \mu_0 M = \mu_0 \frac{N}{L} I + \mu_0 M;$$

äußere, geschlossene Kurve: Hysterese-Kurve.

Neukurve

$P_3$  und  $P_4$ : Das Remanenzfeld  $B_{rem}$  bleibt auch bei Abschalten von  $B_{aus} \Rightarrow$  Permanentmagnet



Auf der Neukurve  $\vec{B}_{aus} \parallel \vec{M} \Rightarrow$  aus Gl. (27.22)  $M = \chi_{mag} \frac{B_{aus}}{\mu_0} \Rightarrow$   
 $B = B_{aus} + \mu_0 M = (1 + \chi_{mag}) B_{aus} = \mu_{rel} B_{aus} = \mu_{rel} \mu_0 nI = \mu nI$  wobei  
 $\mu$  Permeabilität des Materials:  $\mu = \mu_{rel} \mu_0 = (1 + \chi_{mag}) \mu_0$

TABLE 27-2

Maximum Values of  $\mu_0 M_s$  and  $K_m$  for Some Ferromagnetic Materials

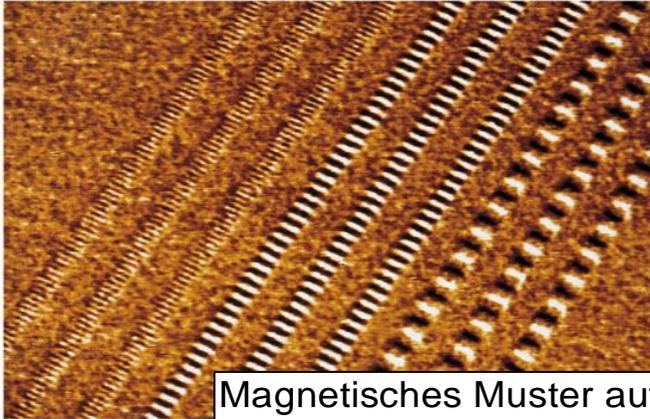
Material	$\mu_0 M_s, T$	$\mu_{rel}$
Iron (annealed)	2.16	5,500
Iron-silicon (96 percent Fe, 4 percent Si)	1.95	7,000
Permalloy (55 percent Fe, 45 percent Ni)	1.60	25,000
Mu-metal (77 percent Ni, 16 percent Fe, 5 percent Cu, 2 percent Cr)	0.65	100,000

Hysteresekurve eines magnetisch weichen Materials  $\Leftrightarrow B_{rem}$  sehr klein verglichen mit dem eines harten Materials

Die von der Hysteresekurve umschlossene Fläche ist proportional der Energie, die während des irreversiblen Prozesses der Magnetisierung und Entmagnetisierung als Wärme verloren geht.

Fläche klein  $\Leftrightarrow$  magnetisch weiche Materialien (z.B. Weicheisen), werden oft als Kerne von Transformatorenspeulen verwendet.

Fläche groß  $\Leftrightarrow$  magnetisch harte Materialien (z.B. unlegierter Stahl, AlNiCo)  $\Rightarrow$  Permanentmagnete



Magnetisches Muster auf einer Festplatte bei  $2400\times$  Vergrößerung



Beispiel 27.12: Eine Spule mit Eisenkern

Lange Spule mit  $n = N/L = 12$  Windungen pro cm, mit Kern aus gehärtetem Eisen. Spulenstrom  $I = 0.50$  A erzeugt im Inneren der Spule insgesamt ein Magnetfeld  $B = 1.36$  T.

Gesucht: a) äußeres Magnetfeld  $B_{\text{aus}}$ , b) relative Permeabilität  $\mu_{\text{rel}}$ , c) Magnetisierung  $M$

Teil a) mit Gl. (27.9)  $B_{\text{aus}} = \mu_0 n I = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1})(1200 \text{ Wdn m}^{-1})(0.50 \text{ A}) = 7.54 \times 10^{-4} \text{ T};$

Teil b) mit Gl. (27.35)  $B = \mu_{\text{rel}} B_{\text{aus}} \Rightarrow \mu_{\text{rel}} = \frac{B}{B_{\text{aus}}} = \frac{1.36 \text{ T}}{7.54 \times 10^{-4} \text{ T}} = 1800$

Teil c) mit Gl. (27.34)  $B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M \Rightarrow \mu_0 M = B - B_{\text{aus}} = 1.36 \text{ T} - 7.54 \times 10^{-4} \text{ T} \approx 1.36 \text{ T}$

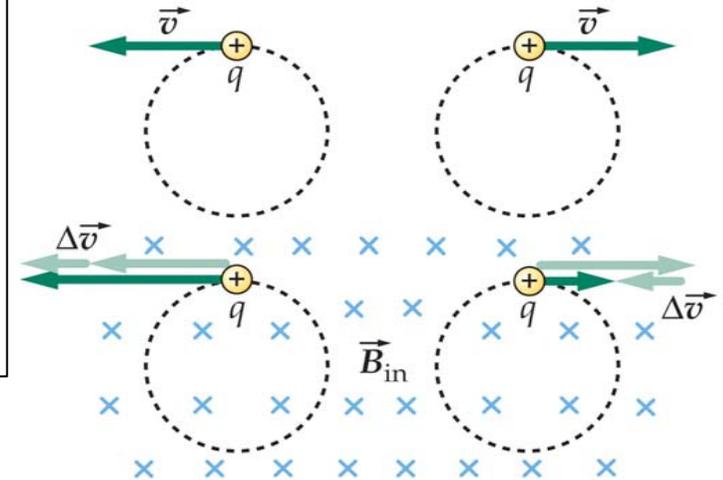
$\Rightarrow M = \frac{B - B_{\text{aus}}}{\mu_0} = \frac{1.36 \text{ T}}{4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}} = 1.08 \times 10^6 \text{ A m}^{-1}$

**Diamagnetismus**

Diamagnetische Materialien haben sehr kleine, negative Werte der magnetischen Suszeptibilität  $\chi_{\text{mag}}$ .

Positive Ladung bewege sich entgegen dem Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn  $\Rightarrow$  magnetisches Moment zeigt aus der Ebene heraus.

Einschalten eines äußeren Magnetfeldes, der in die Ebene hinein zeigt  $\Rightarrow$  zusätzlicher Beitrag zur Zentripetalkraft  $\Rightarrow$  damit Kreisbahn konstant  $\Rightarrow$  Ladung muß sich schneller bewegen  $\Rightarrow$  Änderung des magnetischen Momentes zeigt aus der Ebene heraus.



Positive Ladung bewege sich im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn  $\Rightarrow$  magnetisches Moment zeigt in die Ebene hinein.

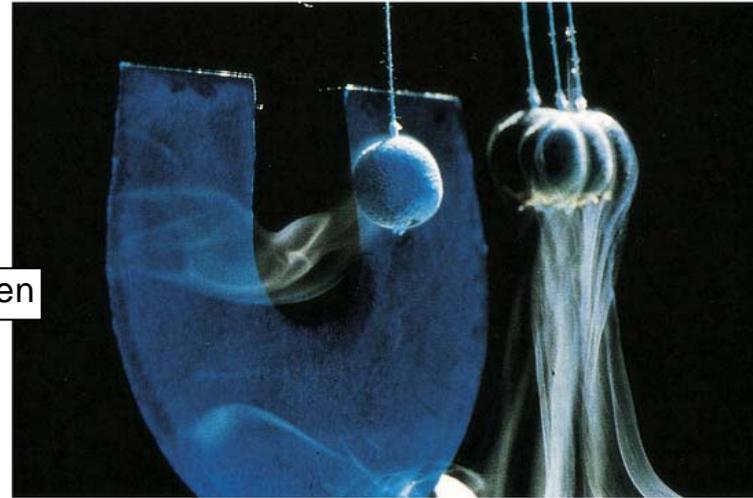
Einschalten eines äußeren Magnetfeldes, der in die Ebene hinein zeigt  $\Rightarrow$  zusätzlicher Beitrag zur Zentripetalkraft  $\Rightarrow$  damit Kreisbahn konstant  $\Rightarrow$  Ladung muß sich langsamer bewegen  $\Rightarrow$  Änderung des magnetischen Momentes zeigt aus der Ebene heraus.

In beiden Fällen ist die Änderung des magnetischen Moments dem äußeren Feld entgegengerichtet. Die permanente magnetische Momente der beiden Ladungen sind gleich groß, aber entgegengesetzt orientiert  $\Rightarrow$  sie heben sich auf.

Übrig bleiben die induzierten magnetischen Momente, die zum äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet sind.

Material diamagnetisch, wenn resultierender Drehimpuls seiner Atome null  $\Rightarrow$  permanenten magnetisches Moment null, siehe Gl. (27.27)

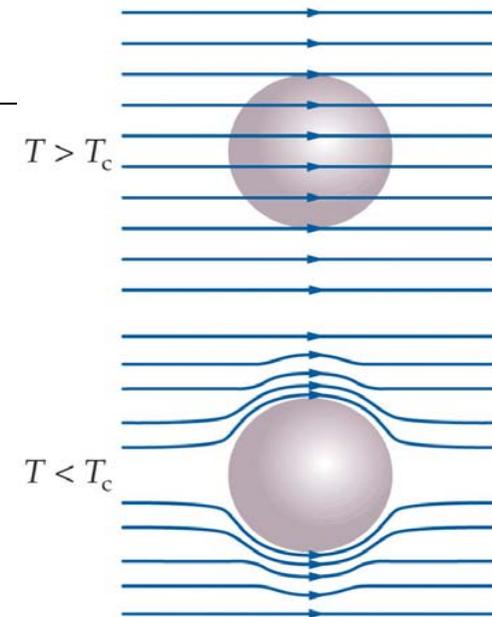
Quecksilber wird von den Polen eines Magneten abgestoßen



Supraleitermagnet in ein äußeres Magnetfeld  $\Rightarrow$  (siehe Teil 28.9) an seiner Oberfläche werden elektrische Ströme induziert, so daß das resultierende Magnetfeld innerhalb des Materials null ist  $\Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (27.23) } B = B_{\text{aus}} (1 + \chi_{\text{mag}}) = 0 \Rightarrow \chi_{\text{mag}} = -1 \Rightarrow$$

ein Supraleiter ist ein idealer Diamagnet



## **27. Das elektromagnetische Feld**

### 27.1 Einführung

Teil A: Die Gesetze des elektromagnetischen Feldes

27.2. Das Faraday-Henry Gesetz

27.3 Elektromagnetische Induktion durch die relative Bewegung zwischen Leiter und Magnetfeld

27.4 Elektromagnetische Induktion und das Relativitätsprinzip

27.5 Das Prinzip der Ladungserhaltung

27.6 Das Ampère-Maxwell'sche Gesetz

27.7 Die Maxwell'sche Gleichungen

Teil B: Anwendungen in elektrischen Schaltkreisen

27.8 Selbst-Induktion

27.9 Freie elektrische Schwingungen

27.10 Erzwungene elektrische Schwingungen: Wechselstromschaltungen

27.11 Energie des elektromagnetischen Feldes

27.12 Gekoppelte Schaltungen