

# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Teil 2

Auswertung von Messungen, zufällige oder statistische Abweichungen

- Auswertung direkter Messungen
- Häufigkeitsverteilung, Häufigkeitsfunktion
- Mittelwert, Standardabweichung der Einzelwerte
- Standardabweichung des Mittelwertes, Vertrauensbereich
- Vertrauensgrenze 68%, 95%, 99%
- Das vollständige Meßergebnis
- Beispiel zur Mittelwertberechnung:
  - Oberflächenspannung von Flüssigkeiten, Messung der Abreißkraft  $F$  des Flüssigkeitsfilmes mit Hilfe eines Kraftmessers

### • Literatur:

- Wolfgang Hellenthal: *Physik für Mediziner und Biologen*, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH Stuttgart 2002
- Trautwein, Kreibig, Oberhauser, Hüttermann: *Physik für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten*, Walter de Gruyter Berlin 2000
  - siehe auch
    - D. Meschede, *Gerthsen Physik*, Springer Verlag 2004
    - W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner Verlag 2004



**Web-Link** <http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/physikalische-messtechnik-ge.htm>

# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung von Messungen, Zufällige oder statistische Abweichungen

Auch bei völliger Ausschaltung systematischer Abweichungen wird die mehrmalige Messung einer Größe  $x$  niemals stets genau übereinstimmende Ergebnisse liefern. All diese **zufälligen oder statistischen Abweichungen** (früher statistische Fehler genannt) führen zu einer **vom Zufall abhängigen Streuung der einzelnen Meßwerte  $x_i$**  (siehe auch Hellenthal S. 351).

### Fehlergrenzen:

Vereinbarte Höchstbeträge für (positive und negative) Abweichungen der Anzeige (Ausgabe) von Meßgeräten (Meßeinrichtungen).

### Theoretisch:

Messung *unendlich* oft wiederholt

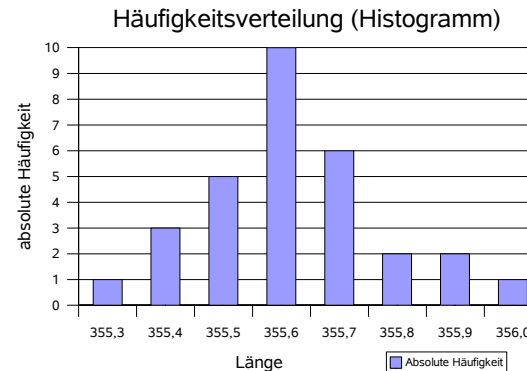
### Praktisch:

*endliche* Anzahl  $n$  von Meßwerten  $x_i$  ermittelt

**Aufgabe:** aus  $n$  Stichprobenwerten  $x_i$  einen besten **Schätzwert**  $\bar{x}$  für den wahren Wert einer Meßgröße  $x$  und ein Maß  $\Delta x$  für die **Unsicherheit** dieser Schätzung.

Beispiel Längenmessung

Messung $i$	Gemessene Länge $l_i$ / mm
1	355,6
2	355,8
3	355,5
4	355,6
5	355,6
6	355,9
7	355,5
8	355,4
9	355,6
10	355,7
11	355,6
12	355,9
13	356,0
14	355,6
15	355,3
16	355,7
17	355,8
18	355,6
19	355,4
20	355,5
21	355,6
22	355,7
23	355,7
24	355,5
25	355,4
26	355,5
27	355,7
28	355,6
29	355,6
30	355,7



# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung direkter Messungen, Zufällige oder statistische Abweichungen

### Auswertung **direkter (oder unmittelbarer) Messungen:**

**Direkte (unmittelbare) Messung** einer physikalischen Größe:

- z.B. Messung einer Fallzeit mit einer Stoppuhr,
  - Messung einer Temperatur mit einem Thermometer,
  - Messung einer Länge mit einem Längenmaßstab
- siehe auch **Hellenthal S. 8-9**, **Trautwein S. 386-387**



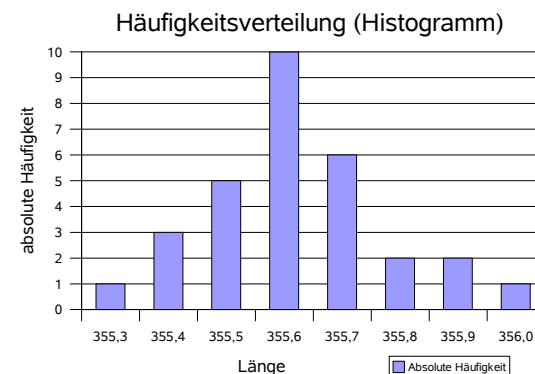
*Theoretisch:*

Messung *unendlich* oft wiederholt →  
Gesamtheit aller erzielter Meßwerte  $x_i$  nennt man **Grundgesamtheit**

*Praktisch:*

*endliche* Anzahl  $n$  von Meßwerten  $x_i$  ermittelt →  
die Anzahl  $n$  von Meßwerten  $x_i$  nennt man **Stichprobe**,  
und die Meßwerte  $x_i$  die **Stichprobenwerte**.

Anzahl der *gleichen* Stichprobenwerte  $x_i$  in der Stichprobe:  
**absolute Häufigkeit**  $h_i$  bzw.  
(bezogen auf  $n$ ) **relative Häufigkeit**  $f_i = h_i / n$



# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung direkter Messungen, Häufigkeitsverteilung

Durch Streuung der Meßwerte  $\Rightarrow$  **Häufigkeitsverteilung**,  
darstellbar durch eine **Häufigkeitsfunktion  $f(x)$** .

Für  $n$  sehr groß  $\Rightarrow f(x)$  stetige Kurve  $\Rightarrow$  Abszissenwert des  
Maximums der Kurve = wahrer Wert der Meßgröße.

Endliche Stichprobe  $\Rightarrow$  wahrer Wert *unbekannt*  $\Rightarrow$

**Aufgabe:** aus  $n$  Stichprobenwerten  $x_i$  einen besten  
**Schätzwert** für den wahren Wert einer Meßgröße  $x$  und ein  
Maß  $\Delta x$  für die **Unsicherheit dieser Schätzung**.

**Lösung:** aus **Wahrscheinlichkeitstheorie**

siehe **Hellenthal S. 350-353**,

siehe **Trautwein S. 386-389**,

Details siehe auch LVA Biostatistik:

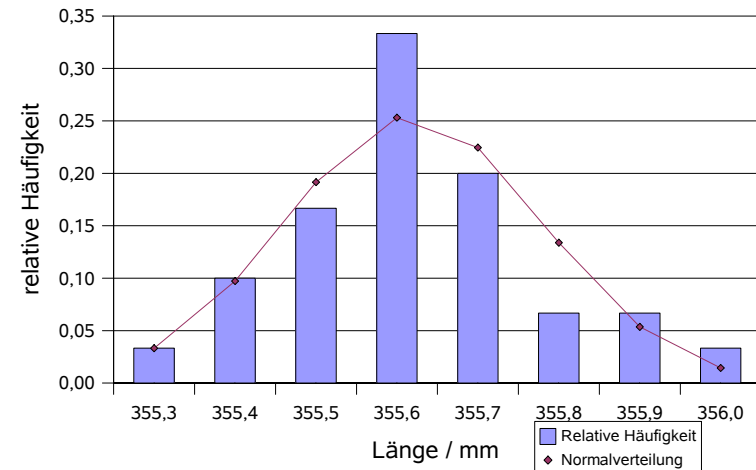


[http://www.sbg.ac.at/bio/radiooeko/hl\\_uebungen.htm](http://www.sbg.ac.at/bio/radiooeko/hl_uebungen.htm)

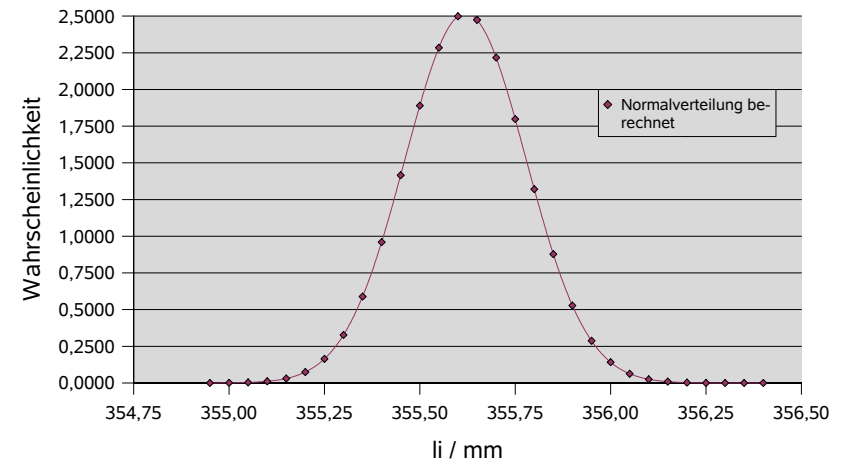


**Web-Link** <http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/physikalische-messtechnik-ge.htm>

Häufigkeitsverteilung, Häufigkeitsfunktion



Gauß- oder Normalverteilung (Glockenkurve)



# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung direkter Messungen, Mittelwert

Bester **Schätzwert** für den wahren Wert ist **das arithmetische Mittel** aus den  $n$  Stichprobenwerten  $x_i$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Maß für die **Streuung** der Meßwerte um den Mittelwert, d.h. der Abweichung

$x_i = x_i - \bar{x}$ , ist die **Varianz  $s^2$**  bzw. die **Standardabweichung  $s(x_i)$  der Einzelwerte vom Mittelwert** (früher mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessung)

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

wobei  $n > 1$

siehe **Hellenthal S. 351-353**, **Trautwein S. 387-388**,

siehe auch  NIST <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/typea.html>

Beispiel Längenmessung	
Messung $i$	Gemessene Länge $l_i$ / mm
1	355,6
2	355,8
3	355,5
4	355,6
5	355,6
6	355,9
7	355,5
8	355,4
9	355,6
10	355,7
11	355,6
12	355,9
13	356,0
14	355,6
15	355,3
16	355,7
17	355,8
18	355,6
19	355,4
20	355,5
21	355,6
22	355,7
23	355,7
24	355,5
25	355,4
26	355,5
27	355,7
28	355,6
29	355,6
30	355,7

Mittelwert

355,620 mm

Standardabweichung der Einzelwerte

0,1584 mm

# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung direkter Messungen, Standardabweichung

Wie „sicher“ der Mittelwert ist, wird angegeben durch die **Varianz**  $s^2(\bar{x})$  (oder  $m^2$ ) bzw. **Standardabweichung des Mittelwertes**  $s(\bar{x})$  (oder  $m$ ) (früher mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwertes)

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}$$

siehe **Hellenthal S. 352-353**, **Trautwein S. 389**,

Für den Fall, daß die Grundgesamtheit **normal** verteilt ist (**rein zufällige Abweichung** der Meßwerte  $x_i$  einer kontinuierlichen Größe  $x$ ), ermöglicht die Standardabweichung die Angabe eines **Vertrauensbereiches**  $V$ , der angibt, daß der wahre Wert der Meßgröße  $x$  mit der **Wahrscheinlichkeit**  $(1-\alpha)$ , genannt **Vertrauensniveau** (früher statistische Sicherheit  $P$ ), im Intervall

$$\bar{x} - V \leq \mu \leq \bar{x} + V$$

liegt.

### Beispiel Längenmessung

Messung $i$	Gemessene Länge $l_i$ / mm
1	355,6
2	355,8
3	355,5
4	355,6
5	355,6
6	355,9
7	355,5
8	355,4
9	355,6
10	355,7
11	355,6
12	355,9
13	356,0
14	355,6
15	355,3
16	355,7
17	355,8
18	355,6
19	355,4
20	355,5
21	355,6
22	355,7
23	355,7
24	355,5
25	355,4
26	355,5
27	355,7
28	355,6
29	355,6
30	355,7

Mittelwert

355,620 mm

Standardabweichung der Einzelwerte

0,1584 mm

Standardabweichung des Mittelwertes

0,0289 mm

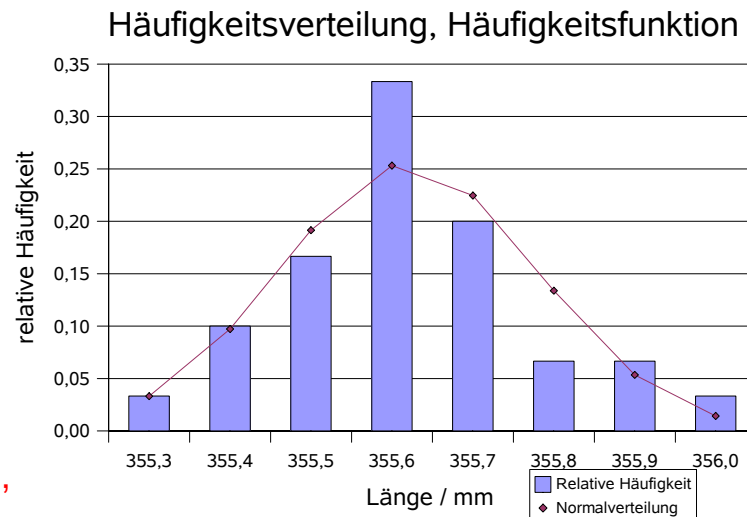
# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung direkter Messungen, Vertrauensgrenze

Die Werte der **Vertrauensgrenze**  $V = s(\bar{x}) \cdot \tau$  (für  $\tau$  siehe Tabelle A.1.5 aus Walcher: Praktikum der Physik, Teubner Verlag) sind **abhängig** sowohl vom Vertrauensniveau  $(1-\alpha)$  als auch vom Stichprobenumfang  $n$ .

Vertrauensniveau	68,27%	95,00%	99,73%
$n$	$\tau$	$\tau$	$\tau$
3	1,32	4,30	19,20
5	1,15	2,80	6,60
10	1,06	2,30	4,10
20	1,03	2,10	3,40
30	1,02	2,05	3,30
100	1,00	2,00	3,10
$n \Rightarrow \infty$ , d.h Grundgesamtheit	1,00	1,96	3,00
	1 $\sigma$ -Regel	2 $\sigma$ -Regel	3 $\sigma$ -Regel

$$\bar{x} - V \leq \mu \leq \bar{x} + V$$



### Beispiel Längenmessung

Messung $i$	Gemessene Länge $l_i$ / mm
1	355,6
2	355,8
3	355,5
4	355,6
5	355,6
6	355,9
7	355,5
8	355,4
9	355,6
10	355,7
11	355,6
12	355,9
13	356,0
14	355,6
15	355,3
16	355,7
17	355,8
18	355,6
19	355,4
20	355,5
21	355,6
22	355,7
23	355,7
24	355,5
25	355,4
26	355,5
27	355,7
28	355,6
29	355,6
30	355,7

Mittelwert	355,620 mm
Standardabweichung der Einzelwerte	0,1584 mm
Standardabweichung des Mittelwertes	0,0289 mm
Vertrauensgrenze 68,27%	0,0295 mm
Vertrauensgrenze 95,00%	0,0592 mm
Vertrauensgrenze 99,73%	0,0954 mm

Hellenthal S. 352-353,  
Trautwein S. 388

# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Auswertung direkter Messungen, das vollständige Meßergebnis

Ein **vollständiges Meßergebnis** enthält:

Den um die bekannte systematische Abweichung korrigierten Mittelwert  $\bar{x}_k = \bar{x} + K$

(mit  $K$  Korrektur).

Die Anzahl der Messungen  $n$  und das zugrundeliegende Vertrauensniveau  $(1-\alpha)$ , internationale Empfehlung  $(1-\alpha) = 95\%$ .

Die Meßunsicherheit  $u$ , die sich zusammensetzt aus

der statistischen Komponente  $u_z$ :  $u_z = \pm V = \pm s(\bar{x}) \cdot \tau$

und der abzuschätzenden systematischen Komponente  $u_s$

**Ergebnis:**  $x = \bar{x}_K \pm u$  wobei  $u = u_z + u_s = s(\bar{x}) \cdot \tau + u_b$

$$l = 355,620 \text{ mm} \pm (0,059 + 0,100) \text{ mm} \\ = (355,62 \pm 0,16) \text{ mm}$$

### Beispiel Längenmessung

Messung $i$	Gemessene Länge $l_i / \text{mm}$
1	355,6
2	355,8
3	355,5
4	355,6
5	355,6
6	355,9
7	355,5
8	355,4
9	355,6
10	355,7
11	355,6
12	355,9
13	356,0
14	355,6
15	355,3
16	355,7
17	355,8
18	355,6
19	355,4
20	355,5
21	355,6
22	355,7
23	355,7
24	355,5
25	355,4
26	355,5
27	355,7
28	355,6
29	355,6
30	355,7

Mittelwert	355,620 mm
Standardabweichung der Einzelwerte	0,1584 mm
Standardabweichung des Mittelwertes	0,0289 mm
Vertrauensgrenze 68,27%	0,0295 mm
Vertrauensgrenze 95,00%	0,0592 mm
Vertrauensgrenze 99,73%	0,0954 mm



# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Beispiel zur Mittelwertberechnung,

### Beispiel 1: Oberflächenspannung von Flüssigkeiten, Messung der Abreißkraft $F$ des Flüssigkeitsfilmes mit Hilfe eines Kraftmessers:

[http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/lehre/ue-biophysik-beschreibung/dichte\\_und\\_oberflaechenspannung\\_2003](http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/lehre/ue-biophysik-beschreibung/dichte_und_oberflaechenspannung_2003).



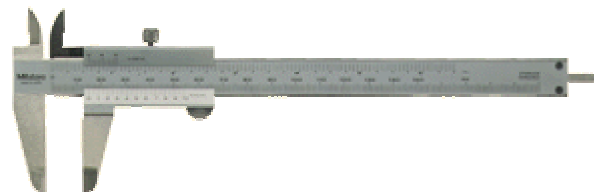
**Präzisionskraftmesser nach Prof. Maey (Dynamometer), 0,1 N**

Mit Nullpunktschieber zum Ausgleich versuchsbedingter Vorbelastungen, z. B. durch Waagschalen oder Rollen.  
Skala gut ablesbar, da jeweils 10 Teilstriche durch abwechselnd rote und weiße Felder zusammengefasst sind.  
In Kunststoffhülse, mit Sperrvorrichtung gegen Überdehnung der Feder.



**Gerät zur Messung der Oberflächenspannung**

Leichtmetallring, mit Schneide und Aufhängung an drei Fäden.  
Taucht die Schneide in eine Flüssigkeit ein, so läßt sich beim Herausziehen die Oberflächenspannung aus der Kraft bestimmen, bei der der Ring von der Flüssigkeitsoberfläche abreißt.



**Präzisions-Messschieber (Schieblehre)**

Zur Messung des Durchmessers des Leichtmetallringes

# Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

## Beispiele zur Mittelwertberechnung, Beispiel 1: Oberflächenspannung von Flüssigkeiten, Messung der Abreißkraft $F$ des Flüssigkeitsfilmes mit Hilfe eines Kraftmessers:

[http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/lehre/ue-biophysik-beschreibung/dichte\\_und\\_oberflaechenspannung\\_2003](http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/lehre/ue-biophysik-beschreibung/dichte_und_oberflaechenspannung_2003).

Messung	Ergebnis Stichprobenwert			EXCEL bzw. StarOffice Befehl
		Stichprobenumfang	5	ANZAHL(Wert1;Wert2; ...)
1	24	Mittelwert	24,600	MITTELWERT(Zahl1;Zahl2; ...)
2	25	Standardabweichung der Einzelwerte	0,548	STABW(Zahl1;Zahl2;...)
3	25	Standardabweichung des Mittelwertes	0,245	STABW(Zahl1;Zahl2;...) / WURZEL(ANZAHL(Wert1;Wert2; ...))
4	24	Vertrauensbereich 95%	0,686	Standardabweichung des Mittelwertes * tau
5	25	Vertrauensbereich 95% für <i>Grundgesamtheit</i>	0,480 0,480	KONFIDENZ(Alpha;StandardAbweichung;Umfang) Standardabweichung des Mittelwertes * tau für $n \Rightarrow \infty$
		Statistische Meßunsicherheit	$\pm 0.69$ mN	Aus Vertrauensbereich 95%
		Systematische Meßunsicherheit	$\pm 1$ mN	Aus feinste Skaleneinteilung am Meßgerät
		Meßergebnis	24.60 mN $\pm$ (0.69+1.00) mN= (24.6 $\pm$ 1.7) mN	

$n$	$\tau$	$\tau$	$\tau$
3	1,32	4,30	19,20
5	1,15	2,80	6,60
10	1,06	2,30	4,10
20	1,03	2,10	3,40
30	1,02	2,05	3,30
100	1,00	2,00	3,10
$n \Rightarrow \infty$ , d.h Grundgesamtheit	1,00	1,96	3,00
	1 $\sigma$ -Regel	2 $\sigma$ -Regel	3 $\sigma$ -Regel

berechnet mit Hilfe von TINV(Zahl; Freiheitsgrade) Berechnet Quantile der Student'schen t-Verteilung für die angegebenen Freiheitsgrade.  
**Zahl** ist der Wahrscheinlichkeitswert, zu dem die inverse t-Verteilung berechnet werden soll.  
**Freiheitsgrade** ist die Anzahl der Freiheitsgrade der t-Verteilung.